Lycée Tahar Sfar Mahdia	**Devoir de contrôle n° 2** Mathématiques	Niveau : 4 ème Tech 2
Date : 24 / 02 / 2016	Prof : Meddeb Tarek	Durée : 2 heures

Exercice n°1 : (4,5 pts)

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est correcte. On indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1) Le nombre $A = 2\ln\left(\frac{e}{4}\right) + 5\ln 2 + \ln\left(\frac{8}{e}\right)$ est égal à :

   $a/\ 1 + 2\ln 5$ $\qquad$ $b/\ 8\ln 2$ $\qquad$ $c/\ 1 + 4\ln 2$

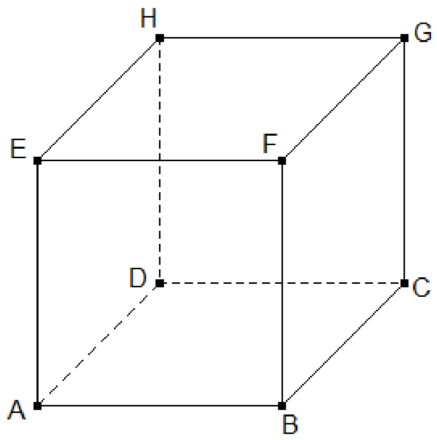
2) $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(x^2 - x\ln x\right)$ est égale à :

   $a/\ 0$ $\qquad$ $b/\ -\infty$ $\qquad$ $c/\ +\infty$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x - 1}{x}$ est égale à :

   $a/\ 1$ $\qquad$ $b/\ 2$ $\qquad$ $c/\ \ln 2$

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 1.



On munit l'espace du repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

4) Le produit scalaire $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BH}$ est égal à :

   $a/\ 0$ $\qquad$ $b/\ \sqrt{2}$ $\qquad$ $c/\ \sqrt{3}$.

5) Le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est égal à :

   $a/\ \overrightarrow{AD}$ $\qquad$ $b/\ \overrightarrow{BF}$ $\qquad$ $c/\ \overrightarrow{BH}$.

6) Une équation cartésienne du plan (ACE) est :

   $a/\ x - y = 1$ $\qquad$ $b/\ x + y = 0$ $\qquad$ $c/\ x - y = 0$.

Exercice n°2 : (7,5 pts)

A. Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = \frac{1}{x} - \ln x$.

1) Dresser le tableau de variations de g.

2) $a/$ Montrer que l'équation : $g(x) = 0$ admet dans $]0, +\infty[$ une solution unique α.

   $b/$ Vérifier que : $1 < \alpha < 2$.

3) Déterminer, suivant les valeurs de x, le signe de $g(x)$ pour $x \in]0, +\infty[$.

B. On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par: $f(x)=\ln x+x-x\ln x$.

On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) Montrer que : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ et que : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=-\infty$.

2) $a/$ Montrer que, pour tout $x\in\,]0,+\infty[$, $f'(x)=g(x)$.

$b/$ Etablir le tableau de variation de f.

3) $a/$ Vérifier que, pour tout $x\in\,]0,+\infty[$, $f(x)-1=(\ln x-1)(1-x)$.

$b/$ Etudier la position de C_f par rapport à la droite $\Delta : y=1$.

$c/$ Montrer que $f(\alpha)=\dfrac{\alpha^2-\alpha+1}{\alpha}$.

$d/$ Tracer Δ et C_f. (donner une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 10^{-2} près en prenant $\alpha\cong 1{,}7$).

Exercice n°3 : *(7 pts)*

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les points $A(0\,;1\,,0)$, $B(1\,;0\,,-2)$, $C(0\,;0\,,-1)$ et $D(1\,;-1\,,0)$.

1) $a/$ Déterminer les composantes du vecteur $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$. En déduire que les points A, B et C déterminent un plan P.

$b/$ Calculer l'aire du triangle ABC.

$c/$ Montrer que le point D n'appartient pas au plan P .

$d/$ Calculer le volume $\mathcal{V}$ du tétraèdre $ABCD$, en déduire la distance d de D à P.

2) $a/$ Montrer qu'une équation cartésienne du plan P est : $x-y+z+1=0$.

$b/$ Montrer que le point C est le projeté orthogonal de D sur P.

3) On considère l'ensemble S d'équation : $x^2+y^2+z^2-2x+2y-2=0$.

$a/$ Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre I et le rayon R.

$b/$ Montrer que P et S sont sécants suivant un cercle $\mathscr{C}$ que l'on caractérisera.

Bonne chance