

Exercice n°1 : (3points)

Cocher la réponse exacte en justifiant la réponse

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^2 - 3x + 2} =$
a) 0 ; b) 1 ; c) -1
- Si x est un réel de $] -1, 0[$ alors $\ln(x^2 + x) =$
a) $\ln x + \ln(x+1)$; b) $\ln x^2 + \ln(x+1)$; c) $\ln(-x) + \ln(x+1)$
- Si A, B, C et D sont quatre points de l'espace tels que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BD}$ alors :
a) $(AB) // (CD)$; b) A, B et C sont alignés ; c) $(AB) \perp (BD)$
- Si $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ est un repère orthonormé direct de l'espace alors : $(\vec{i} - \vec{j}) \wedge (\vec{i} + \vec{j}) =$
a) \vec{k} ; b) $2\vec{k}$; c) $-2\vec{k}$

Exercice n°2 : (6points)

I/ Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x^2 + 1 - \ln x$

- Dresser le tableau de variation de g
- En déduire que $g(x) \geq 0$ pour tout $x \in]0; +\infty[$

II/ Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x + 2 + \frac{\ln x}{x}$

- a) Montrer que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$
b) Dresser le tableau de variation de f
- Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})
a) Montrer que $\Delta : y = x + 2$ est une asymptote à (C)
b) Etudier la position de (C) et Δ
- a) Montrer que f réalise une bijection de $]0; +\infty[$ sur \mathbb{R}
b) Calculer $f(1)$. En déduire $(f^{-1})'(3)$
- Soit (C') la courbe représentative de f^{-1} dans (O, \vec{i}, \vec{j})
a) Préciser les asymptotes de (C')
b) Tracer (C) et (C')

Exercice n°3 : (6points)

Dans l'espace est rapporté à un repère orthonormé direct ; on considère les points $A(0; 1; 0)$; $B(1; 0; -2)$; $C(0; 0; -1)$ et $D(1; -1; 0)$

- a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$
b) En déduire une équation cartésienne du plan P passant par A, B et C

2. a) Montrer que ABCD est un tétraèdre
b) Calculer le volume de ABCD
3. a) Calculer l'aire du triangle ABC
b) Vérifier que C est le projeté orthogonal de D sur le plan P
c) En déduire la distance du point D au plan P
4. Soit S l'ensemble des points M (x ; y ; z) tels que : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2 = 0$
a) Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre et le rayon
b) Montrer que P et S sont sécants suivant un cercle C dont on précisera le centre et le rayon

Exercice n°4 : (5points)

f désigne une fonction dérivable sur IR et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (o, \vec{i}, \vec{j})

- (C) admet une branche infinie parabolique de direction (o, \vec{i})
- Le tableau de variation de f est le suivant

| | | | | |
|-------|-----------|----|---|-----------|
| x | $-\infty$ | 0 | 3 | $+\infty$ |
| f'(x) | - | 0 | + | + |
| f(x) | -1 | -3 | 0 | $+\infty$ |

I/

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution α unique dans $]0 ; 3[$
2. Donner suivant les valeurs de x, le signe de f(x)
3. Ecrire l'équation de la tangente T à (C) au point d'abscisse 3
4. Tracer (C) (on prendra $\alpha = 2$)

II/ Soit F la fonction définie par $F(x) = \ln(f(x))$

1. Déterminer le domaine de définition de F
2. Déterminer $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$
3. Montrer que (C_F) admet une branche infinie de direction (o, \vec{i})
4. Dresser le tableau de variation de F
5. Montrer que le point I(3,0) est un point d'inflexion pour (C_F)
6. Déterminer la primitive sur $[3 ; +\infty[$ qui s'annule en 3 de la fonction g définie par : $g(x) = \frac{f(x) + f'(x)}{f(x)}$