Lycée secondaire Nassrallah	Devoir de Synthèse n°1 Mathématiques Durée : 2 heures	Prof : Mr Selmi Sofièn
Classe : $4sc_2$		A.S : 2020 / 2021

Exercice n°1 (3,5 points)

On donne dans l'annexe ci-joint (Figure 1) la courbe d'une fonction f définie et continue sur IR.

1) Déterminer : $f'(-1)$ et $f'(4)$ et donner une approximation affine de $f(4,001)$.
2) Déterminer les limites suivantes : $\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)}{x-1}$ et $\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)}{x-1}$.
3) Calculer les limites suivantes : $\lim_{x\to+\infty} f\left(\frac{x}{x-1}\right)$ et $\lim_{x\to1^-} f\left(\frac{x}{x-1}\right)$
4) Soit g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $g(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}$ et on pose $h(x)=g\circ f(x)$.
   a- Montrer que g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer $g'(x)$.
   b- Prouver que h est dérivable sur $]1,+\infty[$ et calculer $h'(4)$.

Exercice n°2 (5,5 points)

Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x)=\begin{cases} x^3+x-3 & \text{si } x<1 \\ \frac{-1}{\sqrt{x}} & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$

1) Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
2) Montrer que f est continue en 1.
3) Etudier la dérivabilité de f en 1.
4) a- Montrer que f est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty,1]$ et $[1,+\infty[$.
   b- Calculer $f'(x)$.
5) a- Montrer que l'équation $f(x)=-2$ admet dans l'intervalle $]0,1[$ une solution unique α.
   b- Vérifier que : $\alpha=\frac{1}{\alpha^2+1}$.

Exercice n°3 (6 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. On donne dans l'annexe ci-joint (Figure 2), le cercle ζ de centre O et de rayon 2.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $\frac{i}{2}z^2+(1-i\sqrt{3})z-\sqrt{3}+i=0$.
2. On considère les points A, B et C d'affixes respectifs : $a=\sqrt{3}+i$; $b=i.a$ et $c=(1-i).b$.
   a- Ecrire les nombres complexes a , b et c sous la forme exponentielle.
   b- Construire les points A et B sur la figure 2 (Voir annexe).
3. a- Montrer que le triangle OAB est rectangle et isocèle en O.
   b- Prouver que le quadrilatère OACB est un carré et construire alors le point C.
4. La droite (OC) coupe l'arc orienté $\overset{\frown}{BA}$ du cercle ζ en un point M d'affixe m.
   a- Déterminer la forme exponentielle de m.
   b- Calculer l'aire du triangle MAB.

Exercice n°4 (5 points)

1) Le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$. On désigne par I le point d'affixe 1.
   On considère l'application f du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe $z\neq 1$ associe le point M' d'affixe z' tel que : $z'=\frac{z}{z-1}$.
   a- Déterminer l'ensemble E des points M(z) tels que z' est imaginaire.
   b- Déterminer l'ensemble F des points M(z) tels que $|z'|=1$.

2) a- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2+2i\sin(\theta).z-1=0$ où θ est un réel de $]0,\pi]$.
   b- Donner les solutions de (E) sous la forme exponentielle.

3) Soit x un réel de $]0,\pi]$
   a- Vérifier que : $1-e^{ix}=-2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)e^{i\frac{x}{2}}$.
   b- Montrer que : $z'=e^{ix} \Leftrightarrow z=\dfrac{e^{i\frac{x}{2}}}{2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$.

4) a- Résoudre dans $\mathbb{C}$, de l'équation (E') : $\left(\frac{z}{z-1}\right)^2+\frac{2i\sin(\theta).z}{z-1}-1=0$
   b- Donner les solutions de (E') sous la forme exponentielle.

ANNEXE (à rendre avec la copie)

Nom : ……………………………………………………. Prénom : ……………………………………………………. Groupe : ……..

Figure 1 (Exercice n°1)

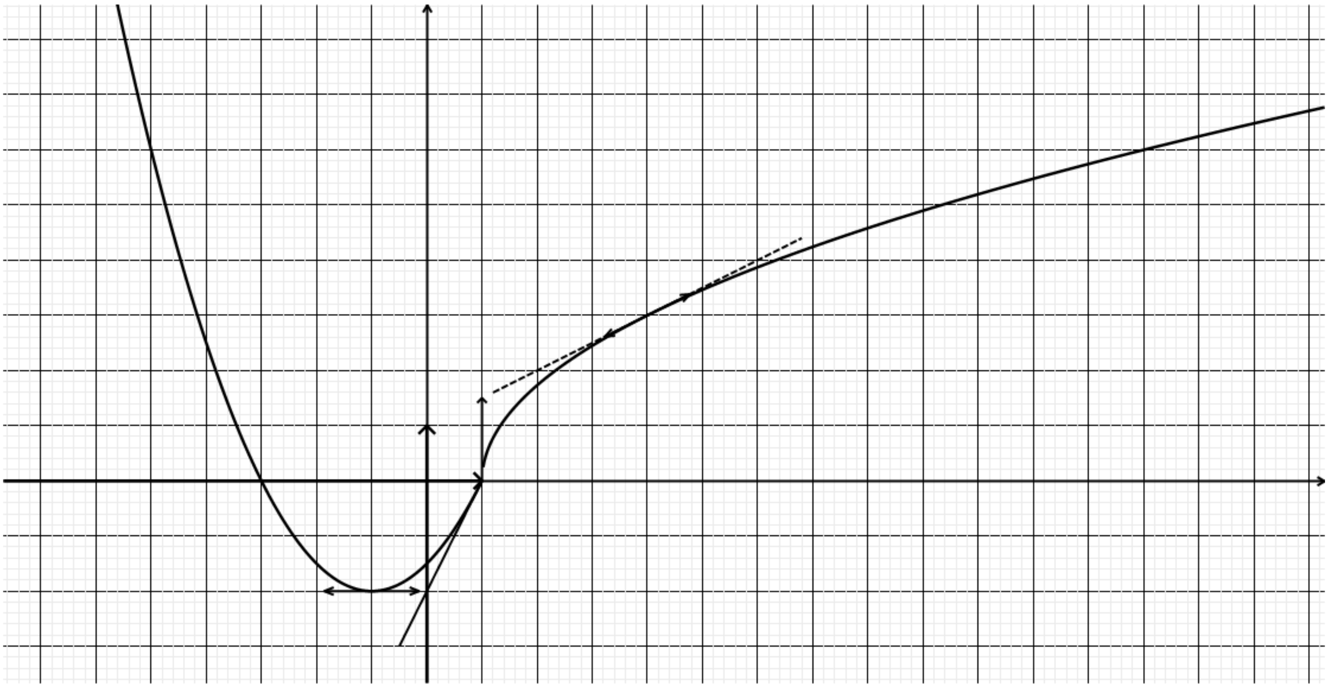

Figure 2 (Exercice n°3)