Devoir de Synthèse n°1
Mathématiques

Mr : Afli Ahmed
A.S : 2019/2020

N.B : La qualité de la rédaction, la numérotation des pages et le respect de l'ordre des questions, constituent un élément déterminant dans l'appréciation de la copie

Exercice 1 :(3 points)

Choisir la réponse juste :

1) Soit l'équation (E) : $2z^2 - 2e^{i\theta}z + ie^{i\theta} = 0$ dont les solutions sont notées z_1 et z_2.
Alors :

(a) $\arg(z_1) + \arg(z_2) \equiv \theta + \pi[2\pi]$ (b) $\arg(z_1) + \arg(z_2) \equiv \theta + \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

2) Sachant que $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ alors un argument de $i\cos(\theta)$ est :

(a) $-\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi}{2} + \theta$

3) Le nombre complexe $z_0 = 1 + i\sqrt{3}$ est une racine sixième de l'unité.

(a) Vrai (b) Faux

4) Les suites U et V définies par : $U_n = \frac{1}{n}$ et $V_n = -U_n$ sont adjacentes.

(a) Vrai (b) Faux

Exercice 2 :(4 points)

Soit f une fonction deux fois dérivable sur IR.

On donne le tableau de variation ci-dessous.

x	$-\infty$		-1		4		5		6		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$		$-$	
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	3	$\searrow$		$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

1) Montrer que f est strictement croissante sur $]-\infty, 4[$

2) Montrer que la courbe de f admet deux points d'inflexions

3) Déterminer le nombre d'extremum de f. Justifier.

4) Sachant que $f(-1) = 4$, Calculer $(fof)'(-1)$

5) Soit $T : y = \frac{3}{2}x + 1$ l'équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.

Calculer $f\left(\frac{1}{2}\right)$

6) Justifier que $|f(-1) - f(4)| \leq 15$.

Exercice 3 :(6 points)

A-1) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 - z + 1 = 0$.

Ecrire les solutions sous forme exponentielle.

2) En déduire, les solutions de l'équation : $z^4 - z^2 + 1 = 0$.

B- Soit $\theta \in [0, \pi]$

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - (2\cos\theta)z + 1 = 0$.

2) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^3 - (i + 2\cos\theta)z^2 + (1 + 2i\cos\theta)z - i = 0$

a) Vérifier que $z_0 = i$ est une solution de (E).

b) Montrer qu'il existe un réel α, dépendant de θ, que l'on déterminera tel que :

Pour tout z de $\mathbb{C}$ on a : $z^3 - (i + 2\cos\theta)z^2 + (1 + 2i\cos\theta)z - i = (z - i)(z^2 + \alpha z + 1)$

c) Résoudre l'équation (E).

3) Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives : i ; $\cos\theta + i\sin\theta$ et $\cos\theta - i\sin\theta$.

a) Montrer que le triangle : (ABC est isecèle en B) $\Leftrightarrow$ ($2\sin^2\theta + \sin\theta - 1 = 0$).

b) Déterminer θ pour que ABC soit isocèle en B.

Exercice 4 :(7 points)

Soit f la fonction définie sur IR par $\mathbf{f(x) = 2 - \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + 1}}}$

1) Etudier la dérivabilité de f en 0.Interpreter les résultats obtenus.

2) a) Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\mathbf{f'(x) = \frac{-1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}}$

b) Calculer **f '(x)** pour $x \in]-\infty,0[$.

c) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

d) Dresser le tableau de variation de f.

e) Montrer que pour tout $x \in]1,+\infty[$, $\mathbf{|f'(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}}$

3) Montrer que l'équation **f(x) = x** admet, dans $]0,+\infty[$, une solution unique α et que $\boldsymbol{\alpha \in]1,2[}$.

4) On considère la suite (u_n) définie sur IN par $\mathbf{u_0 = 2}$ et pour tout $n \in$ IN, $\mathbf{u_{n+1} = f(u_n)}$

a) Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence que pour tout $n \in$ IN, $\mathbf{1 \leq u_n \leq 2}$.

b) Montrer que pour tout $n \in$ IN, $\mathbf{|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}|u_n - \alpha|}$

c) En déduire que pour tout $n \in$ IN, $\mathbf{|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n |u_0 - \alpha|}$

d) En déduire que la suite (u_n) est convergente et donner sa limite.