

Exercice n°1(5.5pts)

1)Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E) : $z^2 - (1 + 4i)z + 4i = 0$.

2)Mettre les solutions de (E) sous forme exponentielle.

3)Pour tout nombre complexe z on pose

$$P(z)=z^3 + (2 - 4i)z^2 - (3 + 8i)z + 12i.$$

a)Vérifier que les solutions de (E) sont des solutions de l'équation $P(z)=0$

b)Résoudre alors l'équation $P(z)=0$.

Exercice n°2(4pts)

I)1)Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^2 - 2i\bar{z} = 0$

(on peut poser $z=x+iy$; $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$)

2)Dans le plan complexe on considère les points O , A, B et C d'affixes respectives $z_O = 0$, $z_A = -2i$, $z_B = \sqrt{3} + i$ et $z_C = -\sqrt{3} + i$.

a)Ecrire z_A ; z_B et z_C sous forme exponentielle.

b)Montrer que ABC est un triangle équilatéral

c)Déterminer l'affixe du point D pour que ABCD soit un losange.

II)A tout point M d'affixe $z \neq z_C$ on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{z+2i}{z+\sqrt{3}-i}$

1)Ecrire z'_O sous forme cartésienne.

2)Déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z tel que z' est réel.

Exercice n°3(4.5pts)

Soit (U_n) et (V_n) deux suites réelles définies sur \mathbb{N} par $U_0 = 1$, $V_0 = 2$

$$U_{n+1} = \frac{2U_nV_n}{U_n+V_n} \text{ et } V_{n+1} = \frac{U_n+V_n}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

1)a)Montrer que $V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{(V_n-U_n)^2}{2(U_n+V_n)} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

b) Montrer que $0 < U_n < V_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2)a) Montrer que $0 < V_{n+1} - U_{n+1} < \frac{1}{2}(V_n - U_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

b) En déduire que $0 < V_n - U_n < \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

3)a) Montrer que U est croissante et V est décroissante .

b) En déduire que U et V sont adjacentes.

Exercice n°4(6pts)

Soit f la fonction définie par $f(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.

2) Calculer $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$ et $\lim_{1^-} f(x)$.

3) Montrer que f est dérivable sur $] -1 ; 1[$ et que $f'(x) = \frac{-1}{(\sqrt{1-x^2})^3} \quad \forall x \in] -1 ; 1[$

4)a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $] -1 ; 1[$ (une seule solution α , vérifier que $\alpha \in]0; \frac{1}{2}[$).

b) Montrer que pour tout $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$ $|f'(x)| \leq \frac{8\sqrt{3}}{9}$

c) En déduire que $|f(x) - \alpha| \leq \frac{8\sqrt{3}}{9} |x - \alpha| \quad \forall x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$.

5) Soit h la fonction définie sur $]0; \pi[$ par $h(x) = f(\cos x)$

Montrer que h est dérivable sur $]0, \pi[$ et montrer que $h'(x) = \frac{1}{\sin^2 x} \quad \forall x \in]0, \pi[$

Bon travail