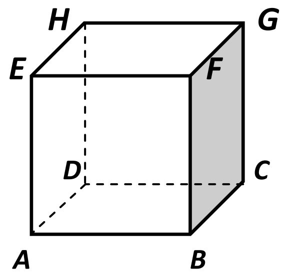
Lycée Houmet Souk	Devoir de Synthèse N : 1	4 Sc 3 & 4 Tec 3
Prof : Loukil Mohamed	Durée : 2 Heures	24 - 01 - 2018

EXERCICE N : 1 (3 points)



ABCDEFGH est un cube d'arête 1 .

Pour chacune des questions suivantes , une seule des trois réponses proposées est exacte .

Sans justification ,le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie .

1) $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{EG}$ est égal à :

a) $\vec{0}$ **b)** 2 **c)** 0

2) ($\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{HF}$) est normal au plan

a) (EFG) **b)** (ABH) **c)** (ABE)

3) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est égal à :

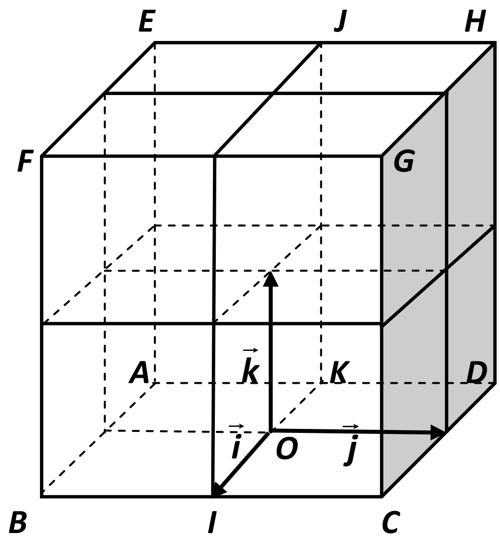
a) $\sqrt{2}\ \overrightarrow{AE}$ **b)** $\overrightarrow{AE}$ **c)** $\vec{0}$

EXERCICE N : 2 (5 points)

ABCDEFGH est un cube d'arrête **2** .

On choisit le repère orthonormé direct **R** (O , $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$)

où O le centre du carré ABCD . On désigne par I , J et K les milieux respectifs des segments [BC] , [EH] et [AD] .



1) Déterminer selon le repère **R** les coordonnées des points I , K , A , F et J .

2) a) On donne : $\vec{N} = \overrightarrow{AI} \wedge \overrightarrow{AJ}$. Montrer que $\vec{N} = 2\,\vec{i} - 4\,\vec{j} + 2\,\vec{k}$

b) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du triangle AIJ .

3) a) Montrer que AFIJ est un tétraèdre .

b) Calculer le volume **V** du tétraèdre AFIJ .

c) Déduire la hauteur **h** du tétraèdre AFIJ issu du point F .

4) Soit Δ la droite passante par K et perpendiculaire au plan (AIJ) .

a) Donner une représentation paramétrique de la droite Δ .

b) Déterminer la distance du point A à la droite Δ .

EXERCICE N : 3 (5 points)

Soit la suite réelle (U_n) définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = 4 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n^2 + 4}{2U_n} \end{cases}$

1) Montrer par récurrence que pour tout $n \in IN$ on a : $U_n > 2$.

2) a) Montrer que la suite (U_n) est décroissante sur IN .

b) Déduire que (U_n) est convergente et calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

3) Soit la suite (V_n) définie sur IN par : $V_n = \ln\left(\dfrac{U_n - 2}{U_n + 2} \right)$.

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$.

b) Exprimer (V_n) en fonction de n puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n$.

c) Montrer que pour tout $n \in IN$; $U_n = \dfrac{2(e^{V_n} + 1)}{1 - e^{V_n}}$.

EXERCICE N : 4 (7 points)

A) Soit la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $g(x) = x^2 - 2 + \ln x$.

1) a) Dresser le tableau de variations de g .

b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $]0 ; +\infty[$ une unique solution α .

c) Vérifier que $1{,}3 < \alpha < 1{,}4$.

2) Déterminer le signe de $g(x)$ sur $]0 ; +\infty[$.

B) Soit la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x^2 + 1 - \ln x}{x}$.

On désigne par **(C f)** la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $R(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$; $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

b) Montrer que $f(\alpha) = 2\alpha - \dfrac{1}{\alpha}$.

c) Etudier les variations de f sur $]0 ; +\infty[$.

2) a) Montrer que la droite $\Delta : y = x$ est une asymptote à **(Cf)** .

b) Etudier la position relative de **(C f)** par rapport à Δ .

3) Tracer Δ et **(C f)** . **(On prend : $\alpha = 1{,}3$)**

4) Déterminer la primitive F de h sur $]0 ; +\infty[$ tel que : $H(e) = \dfrac{1}{2}$.