

L'épreuve comporte deux pages numérotées de 1/2 à 2/2.

Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction et à la présentation des résultats.

Exercice 1 (6 points)

I- Résoudre dans \mathbb{C} des nombres complexes l'équation : $z^2 - (2+i)z + 2i = 0$.

II- Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on désigne par A et B les points d'affixes respectives i et 2 .

A tout point M du plan d'affixe z ($z \neq 2$) on associe le point M' d'affixe z' définie

$$\text{par : } z' = \frac{z-i}{iz-2i}.$$

1) a/ Montrer que : $|z'| = \frac{AM}{BM}$.

b/ En déduire que lorsque M décrit la médiatrice du segment [AB], le point M' décrit un cercle que l'on déterminera.

2) On suppose que $z \neq i$ et $z \neq 2$

a/ Montrer que : $(\vec{u}, \widehat{OM'}) = (\vec{BM}, \widehat{AM}) - \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

b/ En déduire, que si M appartient à la droite (AB), le point M' appartient à une droite que l'on déterminera.

III- On considère les nombres complexes : $\alpha = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ et $\beta = \frac{3+i\sqrt{3}}{2}$.

1) Écrire α et β sous forme exponentielle.

2) Soit θ un réel de l'intervalle $]0, \pi[$.

a/ Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : (E) : $z^2 - 2z + 1 - e^{2i\theta} = 0$.

b/ Écrire les solutions de (E) (z_1 et z_2) sous forme trigonométrique.

c/ Déterminer θ pour que l'on ait : $z_1 = \alpha$ et $z_2 = \beta$.

Exercice 2 (4 points)

Dans l'espace \mathcal{E} est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points A(1,2,-1) et B(2,1,1).

1) Déterminer une équation du plan (Q) passant par A et perpendiculaire à la droite (AB).

2) Soit (P_m) le plan d'équation : $x + y - m + 3 = 0$ où m est un paramètre réel.

a/ Montrer que la droite (AB) est parallèle au plan (P_m) .

b/ pour quelle valeur de m la droite (AB) est-elle incluse dans le plan (P_m) ?

c/ Montrer que le plan (P_m) est perpendiculaire au plan (Q) .

- 3) Soit B' le projeté orthogonal de B sur (P_m) et A' le projeté orthogonal de A sur (P_m) . Déterminer les valeurs de m pour que $ABB'A'$ soit un carré.

Exercice 3 (4 points)

Soit α un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0,1[$. On considère la suite (U_n)

$$\text{définie sur } \mathbb{N} \text{ par : } \begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{(1+\alpha)U_n - \alpha}{U_n} \end{cases}$$

- 1) Montrer que pour tout entier naturel n , $U_n \geq 1$.
- 2) Montrer que (U_n) est une suite croissante.
- 3) En déduire que (U_n) est convergente et trouver sa limite.
- 4) Soit (V_n) la suite définie sur \mathbb{N} par : $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n - \alpha}$.

a/ Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison α .

b/ Exprimer V_n en fonction de n et α . En déduire l'expression de U_n en fonction de n et α .

c/ Retrouver alors la limite de (U_n) quand n tends vers $+\infty$.

Exercice 4 (6 points)

Soit g la fonction définie par : $g(x) = -\frac{1}{2} + \frac{x}{2\sqrt{x^2+1}}$ et soit (O, \vec{i}, \vec{j}) un repère

orthonormé du plan.

1. a- Étudier la parité de la fonction g .
b- Étudier les variations de la fonction g .
c- justifier qu'elle réalise une bijection de \mathbb{R} sur un intervalle que l'on précisera.
d- Tracer le graphe de g . En déduire le graphe de g^{-1} la fonction réciproque de

g .

2. Soit h la fonction définie sur \mathbb{R} par : $h(x) = -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}$.

a- Dresser le tableau de variation de h .

b- Déterminer les asymptotes à la courbe de C_h .

c- Déterminer la position de C_h par rapport à ses asymptotes et tracer le graphe de h dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

3. a- Montrer que h réalise une bijection de \mathbb{R} sur un intervalle que l'on précisera.

b- Montrer que : $h^{-1}(x) = \frac{1}{4x-4} + 1 - x$.

c- Tracer le graphe de $C_{h^{-1}}$.