Lycée Cité El Amel Gabes — Année scolaire :2015-2016

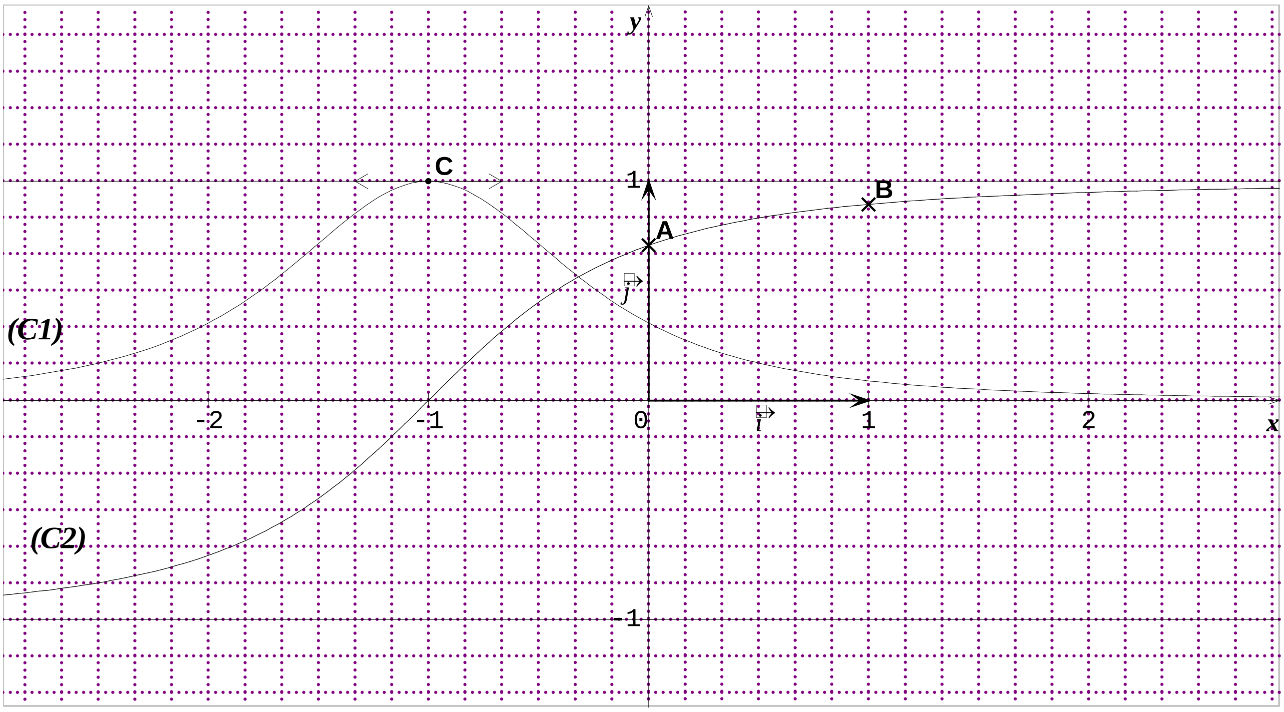
Devoir de synthèse n°1

4^{eme}SC (***Durée : 120 mn***) *Mrs:A-LETAIEF+J-HMIDI +S-SOLA*

EXERCICE N° 1 (4 pts)

Les courbe **(C_1)** et **(C_2)** ci-dessous représentent une fonction f dérivable sur IR et sa fonction dérivée f' .

- L'axe des abscisses est une asymptote à **(C_1)** au voisinage de -∞ et de +∞.
- **(C_1)** est située au dessus de l'axe des abscisses.
- **(C_1)** admet au point C(-1 ,1) Une tangente horizontale
- Les droites d'équation y= -1 et y = 1 sont asymptotes à **(C_2)** respectivement au voisinage de -∞ et de +∞
- **(C_2)** passe par le point A(0 ; $\frac{\sqrt{2}}{2}$) et la tangente à **(C_2)** en A a pour coefficient directeur $\frac{\sqrt{2}}{4}$
- **(C_2)** passe parle point B(1 ; $\frac{2}{\sqrt{5}}$).



1) Vérifier que (C_2) est la courbe représentative de la fonction f.
2) Soit g la fonction définie sur IR par g(x) = f(x) –x
   a) Dresser le tableau de variations de g.
   b) En déduire que l'équation f(x) = x admet une unique solution α dans IR et que 0<α<1.
3) Soit U la suite sur $\mathbb{N}$ définie par $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = f(U_n) \quad ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$
   a) Montrer que a : $0 \leq U_n \leq 1$
   b) Déterminer f ' ([0,+∞[) . En déduire que $\forall\ x \in [0,+\infty[$ on a $|f'(x)| \leq \frac{\sqrt{2}}{4}$
   c) Montrer que $\forall\ n \in \mathbb{N}$ on a : $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\sqrt{2}}{4}|U_n - \alpha|$.
   d) En déduire que $\forall\ n \in \mathbb{N}$ on a : $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^n$
   e) Déterminer alors la limite de la suite U.

EXERCICE N°2:

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x)=\dfrac{x}{2\sqrt{x^2+1}}-\dfrac{1}{2}$

1) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$. Interpréter graphiquement le résultat.

2) a) Montrer que pour tout réel x on a $f'(x)=\dfrac{1}{2(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

b) Etudier les variations de f

3) a) Donner une équation de la tangente T à (Cf) au point $I(0,-\dfrac{1}{2})$

b) Etudier la position relative de T et (Cf).

c) En déduire que $I(0,-\dfrac{1}{2})$ est un point d'inflexion de (Cf)

4) Soit h la fonction définie sur]-∞,0] par $\begin{cases} h(x)=f(\frac{1}{x}) & si\ x\prec 0 \\ h(0)=-1 \end{cases}$.

a) Montrer que h est continue à gauche en 0.

b) Montrer que h est dérivable sur]-∞,0[et que $h'(x)=xf'(x)$

c) Soit x un réel de]-∞,0[en utilisant le théorème des accroissements finis montrer qu'il existe $c\in\left]x,0\right[\ tel\ \ que\ \ \dfrac{h(x)+1}{x}=c\ f'(c)$

d) En remarquant si x tend vers 0^- alors c tend vers 0^- $(x\to0^-\Rightarrow c\to0^-)$

Déduire que h est dérivable à gauche en 0 et que $h'_g(0)=0$

EXERCICE N°3

I) **1)** Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation (E) : $z^2+2(1-3i)z-11-6i=0$.

2) Soit $f(z)=z^3+3(1-2i)z^2-3(3+4i)z-11-6i$

a) Vérifier que $f(-1)=0$.

b) En déduire les nombres complexes α et β tels que $f(z)=(z+1)(z^2+\alpha z+\beta)$.

c) Résoudre alors, dans $\mathbb{C}$ l'équation : $f(z)=0$

II) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$,

on donne les points A ,B et C d'affixes respectives $z_A=-1$, $z_B=\sqrt{3}-1+3i$ et $z_C=-\sqrt{3}-1+3i$

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3=8i$

2) a) Montre que $f(z)=0\Leftrightarrow(z+1-2i)^3=8i$

b) En déduire le centre I et le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC

c) Placer alors les points A ,B et C