Mathématiques	Devoir de Synthèse N°1	
Lycée Takelsa		
Classe :4 ème Sc.Exp 1 Date : le 15/12/2015	Durée : 2 h	Prof : Ziadi Mourad

Exercice N :1 (06pts)

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

1)a) Soit $x > 0$; montrer que pour tout $t \in [x\,,x+1]$ on a : $\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq f'(t) \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$

b) En déduire que pour tout réel $x > 0$ on a : $\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$

2) Soit (U_n) la suite définie sur ℕ par : $U_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

Montrer que la suite (U_n) est convergente vers un réel **L** que l'on déterminera.

3) Soit (V_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $V_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

a) Montrer que pour tout n∈ $\mathbb{N}^*$ on a : $V_n \geq \sqrt{n}$.

b) La suite (V_n) est-elle convergente ?

4) a) Montrer que pour tout n∈ $\mathbb{N}^*$ on a : $U_n \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} \leq U_{n-1}$

b) En déduire que la suite de terme général $\frac{V_n}{\sqrt{n}}$ est convergente vers 2 .

Exercice N :2 (06pts)

1) Soit dans ℂ l'équation (E) : $z^2 - \left(\sqrt{2} + 2 + i\sqrt{2}\right) z + 2(\sqrt{2} + i\sqrt{2}\ ) = 0$.
   a) Vérifier que 2 est une solution de (E) .
   b) Déduire l'autre solution de (E) .
2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 2$ et $z_B = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.
   a) Mettre z_B sous forme exponentielle.
   b) Placer le point B dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$.
3) Soit le point C d'affixe $z_C = 2 + z_B$
   a) Placer le point C dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$.
   b) Montrer que le quadrilatère OACB est un losange.
   c) Vérifier que $1 + e^{i\frac{\pi}{4}} = (e^{-i\frac{\pi}{8}} + e^{i\frac{\pi}{8}})e^{i\frac{\pi}{8}}$
   d) En déduire que $z_C = 4\cos(\frac{\pi}{8})e^{i\frac{\pi}{8}}$.
   e) Montrer que $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2} - 1$.

<u>Problème : (08pts)</u>

Soit la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

On désigne par Cf la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

I) 1)a) Montrer que pour tout x appartient à $[0,+\infty[$ on a : $f'(x) = \frac{-x}{(\sqrt{1+x^2})^3}$

b)Montrer que f réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $]1\,,2]$.

2) a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans $[0,+\infty[$.

b) Vérifier que $\frac{3}{2} < \alpha < 2$.

3)a) Tracer Cf et Cf^{-1} dans le même repère.

b) Montrer que pour tout $x \in]1,2]$ on a : $f^{-1}(x) = \frac{\sqrt{2x-x^2}}{x-1}$

4) Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = f(U_n)$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $1 \leq U_n \leq 2$

b) Montrer que pour tout $x \in [1,2]$ on a : $|f'(x)| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}|U_n - \alpha|$

d) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $|U_n - \alpha| \leq (\frac{\sqrt{2}}{2})^n|U_0 - \alpha|$

e) Montrer, alors que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

II) Soit la fonction g définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ par : $g(x) = \begin{cases} f(\tan(x)) & si\ x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[\\ 1 & si\ \ x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

1) a) Montrer que g est continue à gauche en $\frac{\pi}{2}$

b) Montrer que pour tout $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ on a : $g(x) = 1 + \cos(x)$.

2) a) Montrer que g réalise une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ sur $[1,2]$.

b) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $[1,2[$ et que pour tout $x \in [1,2[$ on a :

$(g^{-1})'(x) = \frac{-1}{\sqrt{2x-x^2}}$.

BON TRAVAIL