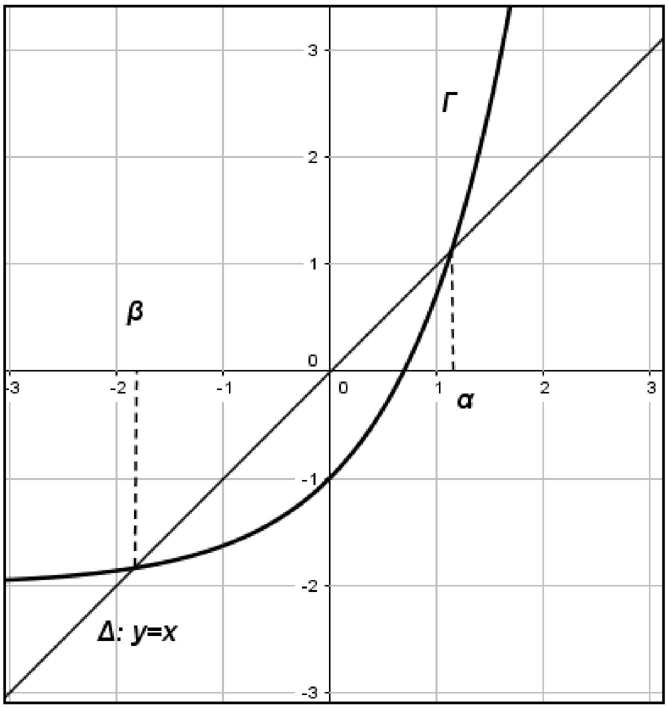
Lycée El Amel Fouchana	Devoir de Synthèse n°01		
Prof : B. Zouhaier	4 ème SC 3	Mardi15-12-2015	Durée :2heures

Exercice n°1 (4points) :

On a tracé ci-dessous, la courbe ***Γ*** représentative d'une fonction f continue sur IR, ainsi que la droite ***Δ*** d'équation y = x dans un repère orthonormé



- ***Γ*** coupe ***Δ*** en deux points d'abscisses $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\beta}$
- La droite d'équation y = - 2 est une asymptote à ***Γ*** au voisinage de - ∞
- ***Γ*** admet une branche infinie de direction l'axe des ordonnées au voisinage de + ∞

En utilisant le graphique :

1) a)Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(2-x)$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

   b) Déterminer suivant les valeurs de x le signe de $f(x)-x$

   c)Etablir le tableau de variation de f

2) On considère la suite U définie par $U_0 = 0$ et $U_{n+1}= f(U_n)$ pour tout n ϵ IN

   a)Montrer que $\beta < U_n < \alpha$ pour tout n ϵ IN

   b) Etudier la monotonie de la suite U

   c)En déduire que U est convergente et déterminer sa limite

Exercice n°2(4 points) :

f désigne une fonction deux fois dérivable sur [-3 ; 1] et f ' et f '' désignent respectivement sa dérivée première et sa dérivée seconde telle que le tableau de variation de f ' est le suivant :

x	-3	0	1
f '(x)	-1 ↗	0	↘ -2

- Γ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé passe par les points A(- 3 ; 2) B(0 ; - 1) et C (1 ; -2)

1) a)Donner le tableau de variation de f

   b) Ecrire une équation de la demi tangente à (Γ) au point C

   c)Tracer une allure de (Γ)

2) Répondre par **Vrai** ou **Faux** en justifiant la réponse

   a) Le point B est un point d'inflexion pour (Γ)

   b) La courbe (Γ) admet deux tangentes parallèles à la droite Δ d'équation $y = -\frac{1}{2}x$

   c) $\left|f\left(\frac{1}{2}\right) + 1\right| \leq 1$

3) Calculer $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{f(\cos x)+1}{x-\frac{\pi}{2}}$

<u>Exercice n°3 (6points) :</u>

1) On considère dans ℂ l'équation (E) : $2z^2 + (7 + i\sqrt{3})z - 4(1 - i\sqrt{3}) = 0$

   a)Montrer que (E) admet une solution réelle que l'on déterminera

   b) Donner l'autre solution de (E)

2) a)Ecrire sous forme exponentielle les nombres complexes $z_1 = -4$ et $z_2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

   b) Déterminer les racines carrées de z_2

   c)En déduire les solutions dans ℂ de l'équation (E') : $2z^4 + (7 + i\sqrt{3})z^2 - 4(1 - i\sqrt{3}) = 0$

3) Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct (o ;$\vec{u}$;$\vec{v}$) ; on considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 2i$ et $z_B = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ et on désigne par I le milieu du segment [OA]

   a)Vérifier que OB = 1 et placer les points I et B

   b) Montrer que le triangle OIB est isocèle

   c)Calculer l'aire du triangle OIB

<u>Exercice n°4 (6points) :</u>

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$

On désigne par (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) Calculer $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement les résultats

2) a)Montrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{-1}{2x\sqrt{x^2+x}}$

   b) Dresser le tableau de variation de f .

   c)Tracer la courbe (Γ)

3) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $]1; 2[$ une unique solution α.

4) a)Montrer que $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ pour tout $x \in [1; +\infty[$

   b) En déduire que pour tout $x \geq 1$, $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$

5) Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{1 + \frac{1}{U_n}} \end{cases}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$

   a)Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$

   b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

   c)En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

   d) Calculer $\lim_{n \to +\infty} u_n$

BON TRAVAIL