AS 2015/2016 Lycée B. Monastir 4SC 1+2+3	**DEVOIR DE SYNTHESE N° 1**
Mde skhiri - Mr Hergli - Mr Ben Mansour	MATHEMATIQUE Durée 2H

EXRCICE N°1 : (6.5points)

Dans l'annexe ci-jointe (Figure 1-page 3) On a trace' dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe (C) d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur $]-\infty\,,-1[$ et sur $]-1\,,+\infty[$

On sait que la courbe (C) admet une asymptote oblique au voisinage de +∞ d'équation : $y = \frac{3}{2}x - 1$, une asymptote verticale d'équation x= -1 et une asymptote horizontale d'équation y=0 au voisinage de -∞ et deux tangentes en -2 et en 0 .

En s'aidant de la figure 1 et aux informations précédentes, répondre aux questions suivantes :

1) a- Dresser le tableau de variation de f sur IR-$\{-1\}$ et déterminer $f(\,]-\infty\,,-2]\,)$

b- déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{1-x}$, $\lim\limits_{x\to-2}\frac{f(x)+1}{x+2}$, $\lim\limits_{x\to-1^-}\frac{f(x)}{x+1}$ et $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$. Déduire $\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(x)-0.5}{x}$

c- Montrer qu'il existe $c \in [0.1]$ tel que $f'(c) = 1$

2) Soit g la restriction de f sur $]-1\,,+\infty[$

a- Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera

b- Déterminer $(g^{-1})'(0)$

c- Tracer dans le même annexe (figure 2) la courbe de g^{-1}

EXRCICE N°2 : (7points)

1)a-Développer $(1+i)^2$ puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2z + 1 - i = 0$

b- Vérifier que i est une solution de l'équation (E) : $z^3 - (2+i)\,z^2 + (1+i)z - (1+i) = 0$

et chercher les autres solutions de (E)

2)On pose $a = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$; $b = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

a- Montrer que $|a| = \sqrt{2+\sqrt{2}}$ et que $ab = 1 - i$

b- Montrer que $1 + cos\varphi + isin\varphi = 2cos\frac{\varphi}{2}\left(cos\frac{\varphi}{2} + isin\frac{\varphi}{2}\right)$, $\forall\varphi \in IR$

c- Déduire que $a = 2\cos\frac{\pi}{8}e^{i\frac{\pi}{8}}$ puis déterminer la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{8}$

d- Déterminer la forme exponentielle de b

3) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives a et b

a) Déterminer c l'affixe du point C sachant que OACB est un parallélogramme

b)Déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$. En déduire la nature du quadrilatère OACB puis calculer son aire

Exercice n°3 (6.5points)

Soit f la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^2-2x+5}$

1)a- Dresser le tableau de variation de f

b-Montrer que f admet une fonction réciproque noté f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera

2)a-Montrer que pour tout x de J on a : $f^{-1}(x) = 1+\sqrt{x^2-4}$

b-Montrer que la droite d'équation : y=x+1 est une asymptote oblique a la courbe de f^{-1} au voisinage de $+\infty$

3)Soit g la fonction définie sur $[0,\frac{\pi}{2}[$ par $g(x) = f^{-1}(\frac{2}{\cos x})$

a-Déterminer $\lim\limits_{x\mapsto\frac{\pi}{2}^-} g(x)$

b- Montrer que pour tout x de $[0,\frac{\pi}{2}[$; $g(x) = 1+2\tan x$

c-Montrer que l'équation : $g(x) = 2x+2$ admet une unique solution $\propto$ dans $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$

d- Montrer que $\forall\, x \in \left[0,\frac{\pi}{3}\right]$, $2 \le g'(x) \le 8$, déduire que $\frac{1}{6} \le \propto$

4)a-Montrer que g réalise une bijection de $[0,\frac{\pi}{2}[$ sur $[1,+\infty$

b-Montrer que g^{-1} est dérivable sur $[1,+\infty[$ et que pour tout x de $[1,+\infty[$; $(g^{-1})'(x) = \frac{2}{x^2-2x+5}$

ANNEXE (A rendre) Nom ....

Fig 1

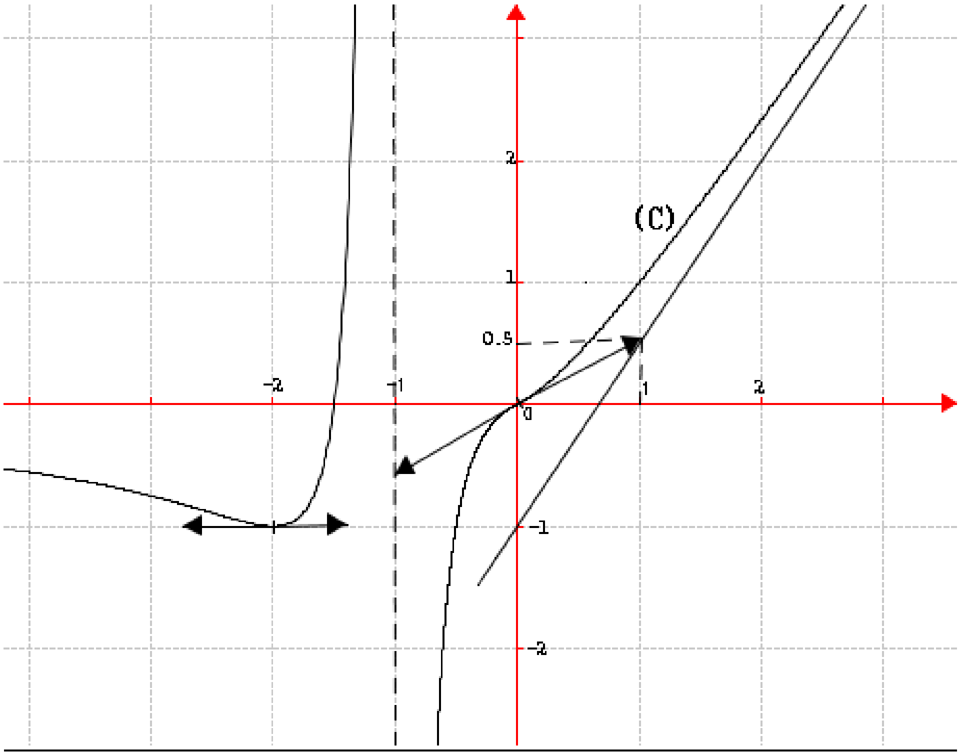
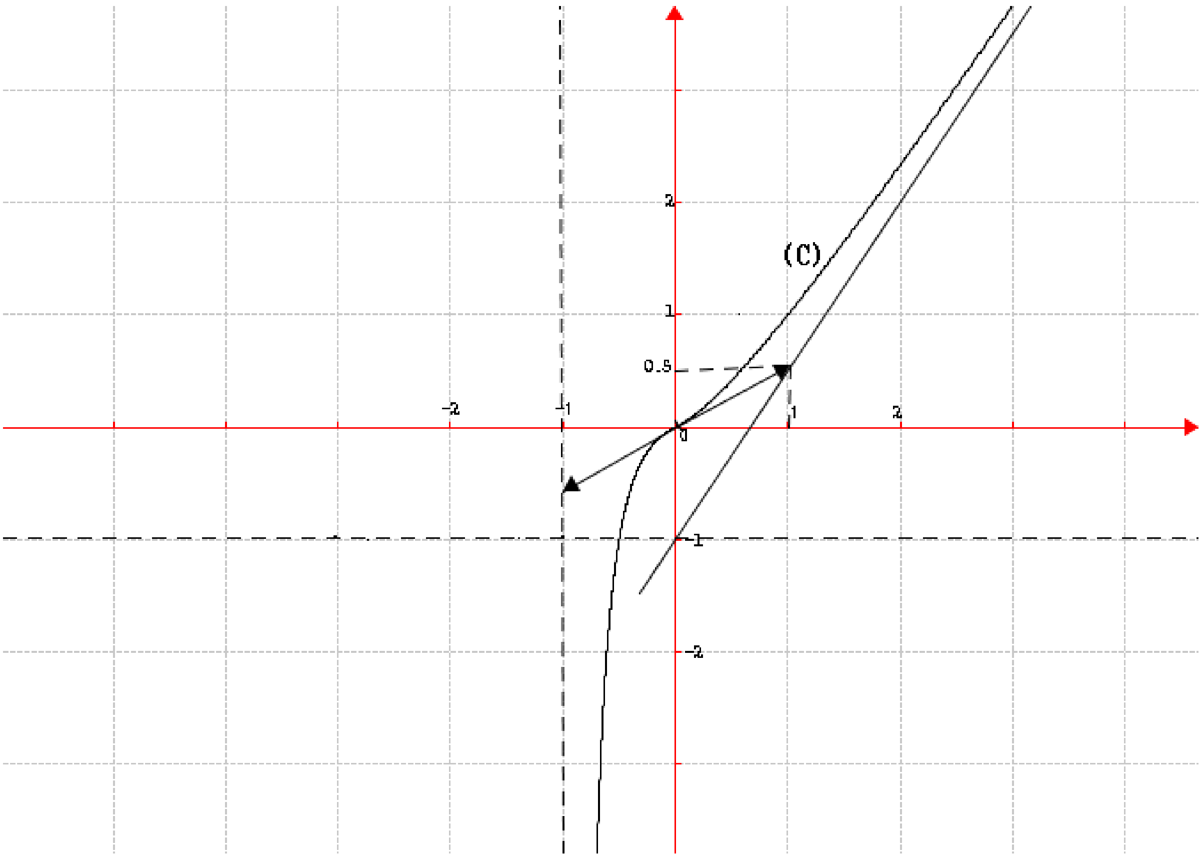


Fig 2



03 DECEMBRE 2015 ---- 4SC1+2+3