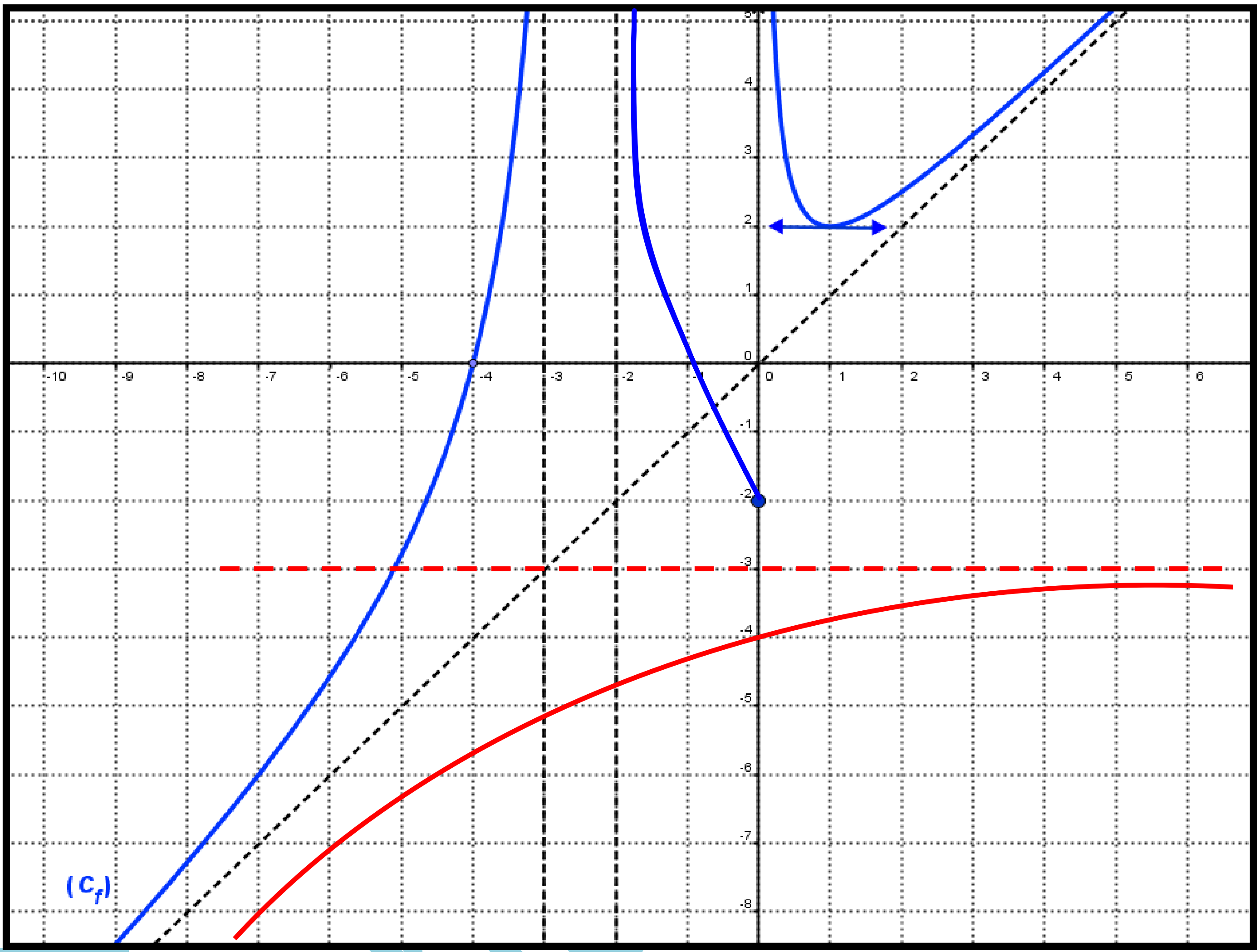
NOM et PRENOM.................................. CORRIGE. .... N°.........

Feuille à RENDRE.

ANNEXE 1.



ANNEXE 2.

Domaine de définition de f.	]-∞,-3[U]-2,+∞[	Domaine de continuité de f.	]-∞,-3[U]-2,0[U] 0, + ∞[		
$\lim\limits_{+\infty} f =$	+∞	$f(0) =$	-2		
$\lim\limits_{-\infty} f =$	-∞	$\lim\limits_{0^+} f =$	+∞	$\lim\limits_{-\infty} \frac{f(x)}{x} =$	1
$\lim\limits_{(-2)^+} f =$	+∞	$\lim\limits_{0^-} f =$	-2	$\lim\limits_{+\infty} f(x) - x =$	0
$\lim\limits_{(-3)^-} f$	+∞	$\lim\limits_{+\infty} \frac{f(x)}{x} =$	1	$\lim\limits_{-\infty} f(x) - x =$	0

Domaine de définition de H.	]-4,-3[U]-2,-1] U] 0, + ∞[	Domaine de continuité de H.	]-4,-3[U]-2,-1] U] 0, + ∞[	H (-1)=	0
H (-4)=	0	H(0)=	N'existe pas.	H (1)=	$\sqrt{2}$
$\lim\limits_{+\infty} H =$	+∞	$\lim\limits_{0^+} H =$	+∞	$\lim\limits_{(-3)^-} H =$	+∞

Sur]-∞, -3[; f est continue et Strictement ↗ donc elle réalise une bijection de]-∞, -3[vers

f (]-∞, -3[)=] $\lim_{+\infty} f$, $\lim_{(-3)^-} f$ [=IR.

La courbe de f^{-1} est le symétrique de C_f par rapport à Δ : y=x.

EXERCICE n°1. **(6 Pts)**

Dans l'annexe 1, la courbe (C_f) est la représentation graphique d'une fonction f dans un RON.

La droite (Δ) est une asymptote à (C_f) au voisinage de +∞ et -∞.

On considère la fonction H(x)=gof(x), où g : $IR_+ \to IR_+$; $x \to \sqrt{x}$

Par lecture graphique, Compléter les deux tableaux de l'annexe 2,

Puis justifier la bijectivité de f de]-∞, -3[vers IR, et tracer la courbe de sa réciproque dans le même repère.

EXERCICE n°2. **(6 Pts)**

Soit la fonction f définie sur IR par :

$$f(x)=\begin{cases}\sin x \ - x & si \ \ x \le 0\\ 3x \ + \ 2\sqrt{x} & si \ \ 0 < x < 1\\ \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} & si \ \ x \ge 1\end{cases}$$

1- Etudier la continuité de f en 0 et en 1.

- $\lim_{0^-} f = \lim_{0^+} f = 0 = f(0) \Rightarrow f \ est \ continue \ en \ 0.$
- $\lim_{1^-} f = 5 \neq \lim_{1^+} f = 0 = f(1) \ \Rightarrow f \ n'est \ pas \ continue \ en \ 1.$

2-

a. Montrer que pour $x < 0$, on a : $-x-1 \le f(x) \le -x+1$

- Pour x<0 ; f(x)= sin x –x or $-1 \le$sin x $\le$ 1 donc –x-1≤f(x)≤-x+1

b. Déduire la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ en -∞

- Comme -x-1≤ f(x) ≤ -x+1 pour x<0 alors $\frac{-x+1}{x} \le \frac{f(x)}{x} \le \frac{-x-1}{x}$

  Or $\lim_{-\infty} \frac{-x+1}{x} = \lim_{-\infty} \frac{-x-1}{x} = -1 \ donc \ \ \lim_{-\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$

3-

a. Montrer que l'équation f(x)=1 admet dans] 0, 1[une unique solution α

- Sur] 0, 1[; f(x)=3x+2√x. f est continue et dérivable et f'(x)=3+1/√x >0

  Donc f est strictement croissante sur]0, 1[et on a f (] 0, 1[)=] 0, 5[contient 1.

  Alors l'équation f(x)=1 admet dans] 0, 1[une unique solution α

b. Déterminer la valeur exacte de α

f (x)=1 ⇔3x+2√x-1=0. On pose t=√x >0, donc $3t^2+2t-1=0$ à deux solutions (t=-1 et t=1/3)

Alors du fait que t>0 on aura √x =1/3 par suite x=1/9

α=1/9.

4-

a. Vérifier que f est dérivable sur]1, + ∞[, et que $f'(x) = \frac{1}{(x+1).\sqrt{x^2-1}}$ pour $x > 1$

Sur] 1, + ∞[; f(x)= $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ est dérivable, puisque x⟶$\frac{x-1}{x+1}$ positive et dérivable sur [1, +∞[

et x⟶$\sqrt{x}$ est dérivable sur IR+.

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)'}{2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} = \frac{\frac{2}{(x+1)^2}}{2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} = \frac{1}{(x+1).\frac{x+1}{\sqrt{x+1}}.\sqrt{x-1}} = \frac{1}{(x+1).\sqrt{x^2-1}}$$

b. Montrer que f réalise une bijection de [1, + ∞[vers un intervalle I à déterminer.

Sur [1, + ∞[, f est strictement croissante (car f'(x)>0) donc elle réalise une bijection de [1, + ∞[vers I = f ([1 ; + ∞[)= [f(1), $\lim_{+\infty} f$[= [0, 1[.

c. Déterminer $f^{-1}(x)$ pour toutx $\in$ I.

Soit x ∈[0, 1[et y ∈[1, + ∞[tel que $f^{-1}(x)=y$

$f^{-1}(x)=y \Leftrightarrow f(y)=x \Leftrightarrow \sqrt{\frac{y-1}{y+1}} = x \Leftrightarrow \frac{y-1}{y+1} = x^2 \Leftrightarrow y-1=x^2+yx^2 \Leftrightarrow y(1-x^2)=1+x^2$

$\Leftrightarrow y = \frac{1+x^2}{1-x^2}$

$$f^{-1}(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$$

EXERCICE n°3. **(2.5 Pts)**

On considère l'application

$$f : \mathbb{C}\setminus\{1\} \longrightarrow \mathbb{C}\setminus\{i\}$$
$$z \longrightarrow \frac{iz+1-i}{z-1}$$

1- Donner l'image de -1 par f, puis l'antécédent de $1+i$ par f.

L'image de (-1) est : $\frac{-i+1-i}{-1-1} = \frac{1-2i}{-2} = -\frac{1}{2} + i$

L'antécédent de (1+i) est z tel que f(z)=1+i sig $\frac{iz+1-i}{z-1} = 1+i \Leftrightarrow z(1+i-i) = 1-i+1+i$

$\Leftrightarrow z = 2$

2- Déterminer la forme algébrique de $f(i-1)$

$$f(i-1) = \frac{i(i-1)+1-i}{i-1-1} = -\frac{2i}{i-2} = \frac{4i-2}{5}$$

3- On pose $a = \frac{(19-4\sqrt{3})+i(1-2\sqrt{3})}{17-4\sqrt{3}}$. Déterminer la forme exponentielle de $f(a)$.

$$f(a)=\frac{i\frac{\left(19-4\sqrt{3}\right)+i\left(1-2\sqrt{3}\right)}{17-4\sqrt{3}}+1-i}{\frac{\left(19-4\sqrt{3}\right)+i\left(1-2\sqrt{3}\right)}{17-4\sqrt{3}}-1}$$

$$=\frac{19i-4i\sqrt{3}-1+2\sqrt{3}+17-4\sqrt{3}-17i+4i\sqrt{3}}{19-4\sqrt{3}-17+4\sqrt{3}+i(1-2\sqrt{3})}$$

$$=\frac{(16-2\sqrt{3})+i(2)}{2+i(1-2\sqrt{3})}=\frac{[(16-2\sqrt{3})+i(2)].[2-i(1-2\sqrt{3})]}{[2+i(1-2\sqrt{3})].[2-i(1-2\sqrt{3})]}$$

$$=\frac{(34-8\sqrt{3})+i(34\sqrt{3}-24)}{17-4\sqrt{3}}=\frac{2(17-4\sqrt{3})+2i\sqrt{3}(17-4\sqrt{3})}{17-4\sqrt{3}}$$

$$=2+2i\sqrt{3}=4.e^{\frac{i\pi}{3}}$$

EXERCICE n°4. **(5.5 Pts)**

Le plan complexe est rapporté à un RON. (O, i, j).

On considère les points A et B d'affixes respectives (2+3i) et (2i-3)

1-

a. Montrer que : les droites (OA) et (OB) sont perpendiculaires.

$\frac{z_A}{z_B}=\frac{2+3i}{2i-3}=\cdots=-i\ \in i\,IR\quad \leftrightarrow (OA)\perp(OB)$

b. Montrer que : OA=OB.

$\left|\frac{z_A}{z_B}\right|=1\ \leftrightarrow OA=OB$

c. Déduire que le triangle OAB est rectangle et isocèle en O.

$(OA)\perp(OB)$ *et* $OA=OB$ *donc …* …

2- Déterminer l'affixe du point I milieu de [AB],

$z_I=\frac{z_A+z_B}{2}=\frac{1+5i}{2}$

Et déduire celle du point D pour que : OADB soit un carré.

$I=O*D\ \leftrightarrow z_I=\frac{z_O+z_D}{2}=-1+5i$

3- Déterminer et construire les ensembles suivants :

E= {M(z) tel que : $|z-2-3i|=\sqrt{13}$ }

$|z-2-3i|=\sqrt{13}\ \leftrightarrow |z_M-z_A|=\sqrt{13}\ \leftrightarrow AM=\sqrt{13}$

Donc M décrit le cercle de centre A et de rayon √13.

F= {M(z) tel que : $\left|\frac{Z-2i+3}{Z-2-3i}\right|=1$ }

$\left|\frac{Z-2i+3}{Z-2-3i}\right|=1\ \leftrightarrow \left|\frac{z_M-z_B}{z_M-z_A}\right|=1\ avec\ z_M\neq z_A$

$\leftrightarrow MB=MA$ .Donc M décrit la médiatrice de [AB].

G= {M(z) tel que : $Arg.\left(\frac{Z-2i+3}{Z-2-3i}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$}

$$Arg.\left(\frac{Z-2i+3}{Z-2-3i}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \leftrightarrow \mathrm{Arg.}\left(\frac{z_M-z_B}{z_M-z_A}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \leftrightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

Donc M décrit le demi-cercle de diamètre [AB] privé de A et B, et contenant O

Puisque$\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$.