EXERCICE N°1

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O , U , V)

1) Résoudre dans C l'équation : $z^2 - 2(2+i)z + 4+4i = 0$

2) On considere l'équation (E) : $z^3 - 4(1+i)z^2 + 12iz + 8(1-i) = 0$

a) Vérifier que 2i est une racine de (E)

b) Résoudre alors dans C l'équation (E)

c) On considère les points A , B et C d'affixes respectives 2 ; 2+2i et 2i , montrer que OABC est un carré

3) a) Résoudre dans C : $z^2 - 2(2+e^{ix})z + 4 + 4e^{ix} = 0$. $x \in]0,\pi[$

b) Ecrire les solutions sous forme exponentielle

c) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe $2(1+e^{ix})$ lorsque x varie sur $]0,\pi[$

EXERCICE N°2

On considere l'équation (E_α) : $z^2 - z + e^{2i\alpha} - ie^{i\alpha} = 0$ $(\alpha\ ]0,\frac{\pi}{2}[)$

1) Resoudre dans C l'equation (E_α)

2) On designe par A ,M' et M'' les points d'affixes respectives : $z_0 = 1$; $z_1 = 1 + ie^{i\alpha}$ et $z_2 = -ie^{i\alpha}$

a- Ecrire z_1 et z_2 sous forme trignometrique

b- Montrer que OM'AM'' est un parallelogramme

c- Determiner α pour que OM'AM'' soit un losange

3) On considere l'équation (E) $(z+2i)^3 = 4\sqrt{2}\ (1+i)$

a- Determiner les racines cubiques de $4\sqrt{2}\ (1+i)$

b- Resoudre alors (E)

EXERCICE N°3

A) On considère la fonction f définie sur IR par $\begin{cases} f(x) = -1 + 2\left(\frac{\sin x}{x}\right) & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \sqrt{x^2+1} - x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

1) Montrer que f est continue en 0

2) Déterminer $\lim_{-\infty} f(x)$ et $\lim_{+\infty} f(x)$

3) Soit g la restriction de f a $[0,+\infty[$

a- Dresser le tableau de variation de g

b- Montrer que g est une bijection de $[0,+\infty[$ sur a un intervalle J que l'on précisera

c- Expliciter $g^{-1}(x)$; $x \in J$

B) Soit la fonction g définie sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ par : $\begin{cases} h(x) = f(\text{cotan} x) \text{ si } x \in]0,\frac{\pi}{2}] \\ h(0) = 0 \end{cases}$

1) a- Vérifier que $h(x)=\frac{1-\cos x}{\sin x}$ pour tout x

b- En déduire que $h(x)=\tan(\frac{x}{2})$ pour tout x

2) Montrer que h est une bijection de $[0,\frac{\pi}{2}]$ sur [0,1]

Exercice n°4

Soit la fonction f définie sur IR^*_+ par : $f(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{x}$

1) a- Montrer que : Si $x\in [1,2]$ alors $f(x) \in [0,2]$

b- Montrer que : Si $x \in [1,2]$ alors $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

2) On considère la suite U définie sur IN par : $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = f(U_n)$

a- Montrer que pour tout n $1 \leq U_n \leq 2$

b- Montrer que pour tout n : $|U_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2}|U_n - \sqrt{2}|$

c- Montrer que $|U_n - \sqrt{2}| \leq (\frac{1}{2})|\sqrt{2} - 1|$

d- Montrer que U converge vers une limite L que l'on déterminera