

Exercice n°1 : (3 points)

Choisir la lettre qui indique l'unique bonne réponse et sans justification.

1) Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

a) $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

b) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

c) $f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

2) Soit la fonction f définie sur par $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

a) f est bijective de $[-1, +\infty[$ sur $[2, +\infty[$ et $f^{-1}(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

b) f est bijective de $[0, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$ et $f^{-1}(x) = -\sqrt{x^2 - 1}$

c) f est bijective de $[0, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$ et $f^{-1}(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

3) Soit $f(x) = \sqrt{x}$ avec $x \in [1, +\infty[$ et on suppose que $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ alors pour tout x de $[1, +\infty[$ on a :

a) $|x - 1| \leq \frac{1}{2} |\sqrt{x} - 1|$

b) $|\sqrt{x} - 1| \leq \frac{1}{2} |x - 1|$

c) $|\sqrt{x} - 4| \leq \frac{1}{2} |x - 1|$

Exercice : (6 points)

Soit l'équation $(E_x) : z^3 - 3iz^2 - (3 + e^{i2x})z + i(1 + e^{2ix}) = 0$ où $x \in [-\pi, \pi[$

1) a) Vérifier que i est une solution de (E_x) .

b) Vérifier que : $z^3 - 3iz^2 - (3 + e^{i2x})z + i(1 + e^{2ix}) = (z - i)[z^2 - 2iz - (1 + e^{2ix})]$.

c) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E_x) .

2) Dans le plan complexe munie d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) on considère les points I , M et N d'affixe respectifs : $z_I = i$, $z_M = i - e^{ix}$ et $z_N = i + e^{ix}$.

a) Montrer que I est le milieu de $[MN]$

b) Montrer que si x varie dans $[-\pi, \pi[$ alors M varie sur un cercle de centre I dont on déterminera son rayon.

c) En déduire l'ensemble des points N lorsque M varie sur le cercle.

3) Dans la suite on suppose que $\underline{x = 0}$.

a) Ecrire $\frac{z_M}{z_N}$ sous forme exponentielle.

b) En déduire la nature du triangle OMN .

Exercice : (5 points)

On considère les deux suites (U_n) et (V_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$U_0 = 0 \text{ et } U_{n+1} = \frac{2U_n + V_n}{3}, \quad V_0 = 7 \text{ et } V_{n+1} = \frac{U_n + 3V_n}{4}$$

1) On considère la suite (W_n) définie pour tout entier naturel n par $W_n = V_n - U_n$.

Montrer que la suite (W_n) est géométrique de raison $\frac{5}{12}$.

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $V_n \geq U_n$.

3) Montrer que (U_n) est croissante et que (V_n) est décroissante.

5) Montrer que ces deux suites sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?

6) On considère à présent la suite (T_n) définie pour tout entier naturel n par $T_n = 3U_n + 4V_n$.

a) Démontrer que la suite (T_n) est constante et donner sa valeur.

b) En déduire la limite des suites (U_n) et (V_n) .

Exercice : (6 points)

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

1) a) Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} et que $f'(x) = \frac{1}{(x^2+2x+2)\sqrt{x^2+2x+2}}$

b) Etudier les variations de f .

c) Montrer que f réalise une bijection de \mathbb{R} sur un intervalle J que l'on déterminera.

2) On note f^{-1} la fonction réciproque de f .

a) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $] -1, 1[$.

b) Dresser le tableau de variation de f^{-1} .

c) Calculer $f(1)$ puis calculer $(f^{-1})'(\frac{2\sqrt{5}}{5})$.

d) Montrer que l'équation : $f^{-1}(x) = 0$ admet une unique solution x_0 dans $] -1, 1[$ et déterminer sa valeur.

e) Donner une équation de la tangente à la courbe de f^{-1} au point A d'abscisse x_0

3) Soit la fonction h définie sur $] -1, 1[$ par $h(x) = f^{-1}(\sin(\frac{\pi}{2}x))$

Montrer que h réalise une bijection de $] -1, 1[$ dans \mathbb{R} .

Bon travail