Exercice N°1 : (5 pts)

Le plan P est orienté dans le sens direct. On considère un hexagone régulier $ABCDEF$ de sens direct et de centre O. (Figure n°1)

1) **a.** Montrer que toute isométrie du plan qui laisse globalement invariant l'hexagone $ABCDEF$ fixe le point O

b. Déterminer toutes les isométries du plan qui laisse globalement invariant l'hexagone $ABCDEF$.

2) Déterminer la nature et les éléments caractéristique de chacune des isométries suivantes : $S_{(OF)}oS_{(EB)}$ et $S_{(AB)}oS_{(CF)}$

3) Soit f une isométrie du plan qui vérifie $f(A) = O$ et $f(B) = D$

a. On pose $g = fot_{\overrightarrow{OA}}$. Déterminer $g(O)$ et $g(C)$.

b. En déduire la nature et les éléments caracteristiques des isométries g

c. Déterminer alors les deux isométries f qui vérifient $f(A) = O$ et $f(B) = D$

d. Déterminer l'image de O par chacune de ces isométries (f).

4) Soit $\varphi = R_{(O,\frac{\pi}{3})}ot_{\overrightarrow{AO}}$ et soit Δ la médiatrice du segment $[BC]$.

Déterminer les droites D_1 et D_2 telles que $R_{(O,\frac{\pi}{3})} = S_{D_1}oS_\Delta$ et $t_{\overrightarrow{AO}} = S_\Delta oS_{D_2}$

Caractériser alors φ.

5) Soit Soit $\psi = S_{(OJ)}o\, t_{\overrightarrow{AO}}$ où J est le milieu du segment $[CD]$ et $h = \varphi o\psi^{-1}$.

a. Déterminer $h(O)$ et $h(A)$,

b. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de h.

c. Pour tout point M de P on note $M_1 = \varphi(M)$ et $M_2 = \psi(M)$. Montrer que M_1 et M_2 sont symétriques par rapport à une droite fixe que l'on déterminera

Exercice N°2 : (4 pts)

Soit g la finction définie sur $[0,+\infty[$ par : $g(x) = sin\left(\frac{x}{2}\right)$. Et on considére la suite (u_n) définie par: $\begin{cases} u_0 = \pi \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases} \forall\, n \in \mathbb{N}$

1) **a.** En utilisant le théoreme des inégalites des accroisement finis, montrer que pout tout $x > 0$ on a : $|g(x)| \leq \frac{1}{2}x$

b. Montrer que pour tout entier n de $\mathbb{N}$: $u_n > 0$.

c. En déduire que pour tout entier n de $\mathbb{N}$ on a : $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$

d. $Montrer\ alors\ que\ pour\ tout\ entier\ n\ de\ \mathbb{N}\ , u_n < \frac{\pi}{2^n}$

e. $Déterminer\ \lim_{n\to+\infty} u_n\ et\ \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$

2) **a.** $Montrer\ que\ pour\ tout\ entier\ n\ de\ \mathbb{N}\ , 0 < u_n < \pi$

b. $En\ utilisant\ le\ théoreme\ des\ accroissement\ finis, montrer\ que\ (u_n) est\ décroissante$

3) $On\ considére\ la\ fonction\ f\ définie\ par: f(x) = x^3\left(\frac{u_n}{2} - u_{n+1}\right) - (u_n)^3\left(\frac{x}{2} - \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)$

a. $Calcule\ f(0) et\ f(u_n)$. $Montrer\ qu'il\ existe\ v_n \in]0, \pi[\ tel\ que\ f'(v_n) = 0$

b. $Déduire\ que: \frac{1}{(u_n)^2}\left(\frac{1}{2} - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \frac{1}{6} \times \frac{1-\cos(\frac{v_n}{2})}{(v_n)^2}$

c. $Déterminer\ alors\ \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(u_n)^2}\left(\frac{1}{2} - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$

Exercice N°3 : ***(4 pts)***

On considère dans $\mathbb{C}$ *l'équation* $(E): z^2 - (1-i)(m+1-i)z - i(m^2 + m(1-i) - i) = 0.$

Où z est l'inconnue et m est un paramètre complexe.

1) **a.** *Vérifier que le discriminant* $\Delta = 2im^2$

b. *Résoudre alors dans* $\mathbb{C}$ *l'équation* (E).

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. *On désigne par* J, M_1 *et* M_2 *les points d'affixes respectives* $z_J = -i$, $z_1 = -im - i$ *et* $z_2 = m - i$

2) *Soit f une application du plan dans lui − même qui à tout point* $M(z)$ *associe le point* $M'(z')$ *tel que :* $z' = iz - 1 - i$

a. *Montrer que f est une rotation d'angle* $\frac{\pi}{2}$ *et de centre que l'on déterminera*

b. *Vérifier que* $M_2 = f(M_1)$

3) *On suppose que m est de module 1 ,* $|m| = 1$.

a. *Montrer que les points* M_1 *et* M_2 *varient sur un cercle* $\mathscr{C}$ *que l'on précisera .*

b. *Montrer que si* $m = e^{i\frac{3\pi}{4}}$ *il existe un seul point A de l'axe* $(O, \vec{v})$ *tel que les droites* (AM_1) *et* (AM_2) *soient tangentes à* $\mathscr{C}$

c. *Construire dans ce cas* $\mathscr{C}$, *les points A ,* M_1 *et* M_2. *(Figure n°2)*

Exercice N°4 : ***(7 pts)***

A − *On considère les fonctions u et v définies sur* $]-\infty, 0]$ *par :*

$u(x) = x - \sin x$ *et* $v(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$

1) **a.** *Etudier le sens de variation de u*

b. *En déduire le signe de* $u(x)$, $\forall\, x \leq 0$

2) **a.** *Calculer* $v'(x)$ *et* $v''(x)$ *la dérivéé second de v .*

b. *Etudier le sens de variation de v*

3) $Prouver\ que : \forall x \leq 0, on\ a : x \leq sinx \leq x - \frac{x^3}{6}$

$\boldsymbol{B} - Soit\ \ f\ la\ fonction\ définie\ sur\ \mathbb{R} par : \begin{cases} f(x) = \frac{sinx}{x}\ si\ x < 0 \\ f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ si\ x \geq 0 \end{cases}$

1) $\boldsymbol{a}. Vérifier\ que\ f\ \ est\ continue\ en\ 0$

$\boldsymbol{b}. Montrer\ que\ pour\ tout\ \ \ x\ <\ 0\ \ , on\ a: \frac{-x^2}{6} < f(x) - 1 < 0$

$\boldsymbol{c}. Etudier\ alors\ la\ dérivabilité\ de\ f\ \ \ en\ 0\ et\ interpréter\ le\ résultat\ obtenu$

2) $Soit\ g\ la\ restriction\ de\ f\ sur\ [0, +\infty[$

$\boldsymbol{a}. Dresser\ le\ tableau\ de\ variation\ de\ g$

$\boldsymbol{b}. Construire\ la\ courbe\ C\ de\ g\ dans\ un\ repère\ orthonormé\ (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})\ du\ plan\ \ (Figure\ n°3)$

$\boldsymbol{c}. Montrer\ que\ l'équation\ g(x)\ =\ x\ admet\ une\ seule\ solution\ \alpha\ >\ 1$

3) $Soit\ un\ réel\ a\ \in [1, +\infty[\ et\ on\ considère\ la\ suite\ (u_n)\ définie\ par : \begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}$

$\boldsymbol{a}. Montrer\ que : \forall n \in \mathbb{N}\ , u_n \geq 1.$

$\boldsymbol{b}. Montrer\ que : \forall x \in [1, +\infty[\ on\ |g'(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$

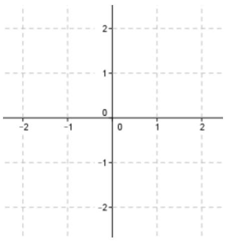
$\boldsymbol{c}. En\ déduire\ que : \forall n \in \mathbb{N}\ , |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} |u_n\ - \alpha|$

$\boldsymbol{d}. Déterminer\ alors\ \lim_{n \to +\infty} u_n$

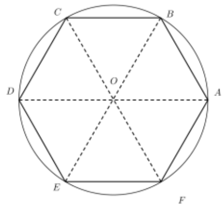
Feuille annexe à rendre

Nom et Prénom :……………………………………….

(Figure n°2)



(Figure n°1)



(Figure n°3)