L – Mateur	Devoir de synthèse n°1	Classe : 4M2
Prof : Mr Amri	16 / 12 / 2020	Durée : 3 H

N.B ***: Le sujet comporte (03) pages .***
Il sera tenu compte de la bonne rédaction et la présentation de la copie

Exercice n°1(4points)

Soit θ un réel de $\left[0 , \frac{\pi}{2}\right[$ et (E_θ) l'équation $z^3-(1-2\sin\theta)z^2+(1-2\sin\theta)z-1=0$

1) a) Vérifier que $z_0=1$ est une solution de (E_θ) . Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ)

b) Donner les solutions sous forme exponentielle.

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$

On considère les points A, M_1 et M_2 d'affixes respectives z_0 , z_1 et $\overline{z_1}$ avec $z_1=-\sin\theta+i\cos\theta$

a) Montrer que AM_1M_2 est un triangle isocèle.

b) Déterminer θ pour que AM_1M_2 soit triangle équilatéral

3) Utiliser ce qui précède pour résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^6-\left(1-\sqrt{2}\right)z^4+\left(1-\sqrt{2}\right)z^2-1=0$

Exercice n°2(5points)

Soit ABC un triangle rectangle en B tel que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ et $I=A*C$. La bissectrice intérieure de $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ coupe (BC) en J

On désigne par $t_{\overrightarrow{AC}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$. R la rotation de centre A et d'angle dont une mesure est $\left(\frac{-2\pi}{3}\right)$ et Δ la parallèle à (IJ) passant par A

1) Montrer que (IJ) est la médiatrice de $[AC]$

2) Vérifier que $t_{\overrightarrow{AC}}=S_{(IJ)}\circ S_\Delta$

3) a) Définir la droite Δ' vérifiant $R=S_\Delta\circ S_{\Delta'}$

b) Déduire la nature et les éléments caractéristiques de l'isométrie $t_{\overrightarrow{AC}}\circ R$

4) Soit $f = g \circ S_{(IJ)}$ où $g = r_{\left(J, \frac{-2\pi}{3}\right)}$

a) Montrer que f fixe le point C

b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f

5) soit $h = S_A \circ S_{(IJ)}$ où S_A la symétrie centrale de centre A

Montrer que h est une symétrie glissante dont on déterminera l'axe et le vecteur

6) Déterminer toutes les isométries qui laissent globalement invariant le segment $[AC]$

Exercice n° 3(5points)

Pour tout entier naturel n, on considère le polynôme P_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$P_n(x) = x^n + x^{n-1} + x^{n-2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + x^2 + x - 1$$

1) Montrer que $\forall\ n \geq 2$; P_n admet une racine et une seule dans l'intervalle $]0\ ,1[$, On note α_n l'unique racine de P_n dans $]0\ ,1[$, on a alors $P_n(\alpha_n) = 0$

L'unicité de α_n permet de définir une suite $(\alpha_n)_{n\geq 2}$

2) a) Montrer que $\forall\ x \in \mathbb{R}_+^*$; $on\ a\quad P_{n+1}(x) \succ P_n(x)$

b) En déduire que $P_{n+1}(\alpha_n) \succ 0$ et que la racine α_{n+1} de P_{n+1} est nécessairement dans l'intervalle $]0\ ,\alpha_n[$

c) En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ est strictement décroissante

3) a) Montrer que $\forall\ x \in \mathbb{R} / \{1\}$ et $\forall\ n \geq 2$; $on\ a\quad P_n(x) = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x} - 2$

b) En déduire que $\forall\ n \geq 2$; $2\alpha_n - (\alpha_n)^{n+1} - 1 = 0$

c) Montrer que $\forall\ n \geq 2$ $on\ a\quad 0 \leq (\alpha_n)^n \leq (\alpha_2)^n$

d) En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} (\alpha_n)^n = 0$

e) Déduire que (α_n) est convergente vers $\dfrac{1}{2}$

Exercice n° 4(6points)

Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par : $f(x) = x - \sqrt{x^2 - 1}$

1) a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f à droite en 1 et interpréter le résultat graphiquement

b) Dresser le tableau de variation de f

2) a) Montrer que f réalise une bijection de I sur $J=]0,1[$. On note g la bijection réciproque de f

b) Expliciter $g(x)$ *pour tout* $x\in]0,1[$

c) Tracer les courbes ζ *et* ζ' respectivement de f et g dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

3) Soit la fonction h définie sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ par $\begin{cases} h(x)=f\left(\dfrac{1}{\sin \pi x}\right) & si\ x\in\left]0,\dfrac{1}{2}\right] \\ h(0)=0 \end{cases}$

a) Montrer que h est continue sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$

b) Vérifier que $\forall\ x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$; $h(x)=\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

c) Montrer que h réalise une bijection de $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ sur un intervalle k que l'on précisera

d) Montrer que h^{-1} est dérivable sur k et expliciter $\left(h^{-1}\right)'(x)$

4) Soit (a_n) *et* (b_n) les suites définies par : $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$ *et* $b_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}f\left(\sqrt{k}\right)$ *avec* $n\geq 2$

a) Vérifier que $\forall\ k\geq 2$ *on a* $f(\sqrt{k})=\sqrt{k}-\sqrt{k-1}$ en déduire que (b_n) est convergente et donner sa limite

b) Montrer que $\forall\ k\geq 2$ *on a* $\dfrac{1}{2\sqrt{k}}\leq f(\sqrt{k})\leq\dfrac{1}{2\sqrt{k-1}}$ En déduire que

$\forall\ n\geq 2$ *on a* $2b_n+\dfrac{1}{n}\leq a_n\leq 2b_n+\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

c) Montrer alors que (a_n) est convergente et donner sa limite

BON TRAVAIL