

<i>Lycée Houmet Souk</i>	<i>Devoir de Synthèse N : 1</i>	<i>4 Mathématiques 1</i>
<i>Prof: Loukil Mohamed</i>	<i>Durée : 3 Heures</i>	<i>04 - 12 - 2018</i>

EXERCICE N : 1 (5 points)

Dans Le plan P orienté dans le sens direct ,on considère un triangle OAB rectangle en O tel que

$$(\widehat{AB;AO}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] , (\mathcal{C}) \text{ le cercle circonscrit à ce triangle et } I \text{ le milieu de } [AB] .$$

1) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement R du plan qui transforme A en I et O en B .

b) Justifier que R est une rotation .

c) On désigne par Ω le centre de R . Montrer que Ω appartient au cercle (\mathcal{C}) .

2) a) Soit $f = R \circ S_O$. Montrer que f est une rotation et préciser son angle .

b) On note Ω' le centre de f . Déterminer $f(O)$ puis montrer que $[\Omega\Omega']$ est un diamètre de (\mathcal{C}) .

c) Prouver que les quadrilatères $IO\Omega'B$ et $IAO\Omega'$ sont des losanges .

3) On pose : $\varphi = R \circ S_{(OA)}$ et K le milieu de $[OB]$.

a) Déterminer $\varphi(O)$ et $\varphi(A)$ puis donner la nature de φ .

b) Prouver que : $\varphi = S_K \circ S_{(OI)}$.

c) Dédurre que $\varphi(\Omega) = O$ puis caractériser φ .

EXERCICE N : 2 (4.5 points)

On considère dans \mathbb{C} l'équation **(E)** : $Z^2 - (\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})Z + 1 = 0$.

On désigne par Z_1 et Z_2 les solutions de **(E)** avec $|Z_1| > |Z_2|$.

I) Sans chercher Z_1 et Z_2 prouver qu'elles sont **distinctes** et **non conjugués** .

II) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On donne les points A, B, I et J d'affixes respectives $Z_1, Z_2, 1$ et -1 et C le milieu de $[AB]$.

1) a) Prouver que : $Z_C = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\frac{\pi}{6}}$.

b) En utilisant $(Z_2 - Z_1)^2 = (Z_2 + Z_1)^2 - 4Z_1Z_2$, montrer que $(Z_2 - Z_1)^2 = 4(Z_C^2 - 1)$.

c) Montre alors que $(\widehat{AB;CI}) + (\widehat{AB;CJ}) \equiv 0 [2\pi]$. Interpréter géométriquement ce résultat .

2) Soit (\mathcal{C}) le cercle circonscrit au triangle AIJ . On note par Z_K l'affixe du point K centre de (\mathcal{C}) .

a) Prouver que K est un point de l'axe (O, \vec{v}) .

b) On pose : $Z_K = iy$ avec y réel. Soit M un point du plan d'affixe Z .

Montrer que $M \in (\mathcal{C})$ équivaut à $|Z - iy|^2 = |1 - iy|^2$.

c) Dédurre que $M \in (\mathcal{C})$ équivaut à $Z\bar{Z} + iy(Z - \bar{Z}) = 1$.

d) En remarquant que $Z_1 = \frac{1}{Z_2}$, montrer que le point B est un point de (\mathcal{C}) .

3) a) Construire le point C dans le repère (O, \vec{u}, \vec{v}) .

b) Construire la droite (AB) et la médiatrice du segment $[AB]$.

c) Dédurre une construction des points A et B .

EXERCICE N : 3 (3.5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

Soit $R: P \rightarrow P$; $M_Z \mapsto M'_Z$ tel que : $Z' = -iZ + 1 - i$.

1) Caractériser R .

2) Donner l'écriture complexe de R^{-1} .

3) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $a^3 = 8$. (Ecrire les solutions sous forme cartésienne)

4) On considère dans \mathbb{C} l'équation E : $iZ^3 + 3(-1+i)Z^2 - 6Z - (10+2i) = 0$.

a) Montrer que : Z est une solution de E si et seulement si Z' est une racine cubique de 8 .

b) Dédurre alors les solutions de E . (Ecrire les solutions sous forme cartésienne)

5) On note par : Z_A, Z_B et Z_C les solutions de E tels que $\text{Re}(Z_A) < \text{Re}(Z_B) < \text{Re}(Z_C)$.

a) Déterminer le centre et le rayon du cercle (\mathcal{C}) circonscrit au triangle ABC . Justifier

b) Construire le triangle ABC .

EXERCICE N : 4 (7 points)

A) Soit la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $R(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Montrer que f est dérivable à droite de 0 .

b) Dresser le tableau de variations de f .

2) a) Montrer que f est une bijection de $[0; +\infty[$ sur un intervalle I que l'on précisera .

b) Montrer que pour tout $x \in I$ on a : $f^{-1}(x) = \frac{2x}{1-x^2}$.

B) Soit g la restriction de f sur $[0; 1]$, on définit sur \mathbb{N} la suite (U_n) par :
$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = g(U_n) \end{cases}$$

1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 < U_n \leq 1$.

b) Vérifier que pour tout $x \in]0; 1]$ on a : $g(x) = \frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}$.

c) Dédire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_{n+1} \leq \frac{1}{2} U_n$ puis déduire que $U_{n+1} \leq \frac{1}{2^n}$.

d) Déterminer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

2) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \tan\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$ puis retrouver $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

3) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = \frac{2^{n+3}U_{n+1}}{1+(U_{n+1})^2}$, $W_n = 2^{n+2} U_n$ et $T_n = W_n - V_n$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n = \frac{2U_{n+1}}{1-(U_{n+1})^2}$ puis déduire que $T_n = U_n \cdot \frac{2^{n+3}(U_{n+1})^2}{1+(U_{n+1})^2}$.

b) En utilisant la question **B) 1) c)**, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $0 < T_n \leq \frac{1}{2^{n-3}}$.

c) Montrer que W est décroissante et déduire que W et V convergent vers la même limite L .

d) En utilisant la question **B) 2)**, montrer que : $L = \pi$.

