Lycée Nahj El Menzeh Beni Khalled	DEVOIR DE SYNTHESE N° 1	Pr : Kaddour Abdelhamid Niveau 4è Math Durée 3h

EXERCICE N°1(5points)

Soit l'équation (E) : $Z^3 - (2 + i) Z^2 + (2 + 2i) Z - 2i = 0$

1) a- Montrer que l'équation (E) admet une racine imaginaire pure m que l'on déterminera
   b- Calculer les deux autres solutions p et q avec la partie imaginaire de p est positive
   c- Ecrire les solutions trouvées sous forme exponentielle
   d- Résoudre dans C l'équation
   $z^6 - (2 + i) z^4 + (2 + 2i) z^2 - 2i = 0$

2) a- On désigne par A , B et C les points d'affixes respectives m , p , et q dans le plan P rapporte à un repère orthonormé (o , u , v) . Montrer que ABC est un triangle rectangle
   b- Soit l'application $f : P \longrightarrow P$

$$M(z) \longrightarrow M'(z') \text{ tel que } z' = \frac{p}{\sqrt{2}} z + i\left(1 - \frac{p}{\sqrt{2}}\right)$$

   Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f
   c- Soient , B' , C ' les images des points B , C par f , quelle est la nature du triangle AB'C'

EXERCICE N°2(7points)

A- Soit f_n la fonction définie sur $[0 , \pi/2]$ par $f_n(x) = x - n + n \sin x$, $n \in \mathbb{N}^*$

1) a- Etudier les variations de f_n
   b- Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet dans $[0 , \pi/2]$ une solution unique α_n
   a- Vérifier que $\sin\alpha_n = 1 - \frac{\alpha_n}{n}$
2) a- Montrer que pour tout x de $[0 , \pi/2]$, $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$
   b- En déduire que la suite (α_n) est croissante
   c- Montrer que la suite (α_n) est convergente
   b- Calculer la limite de $\sin\alpha_n$ quand n tend vers $+\infty$ en déduire la limite de α_n quand n tend vers $+\infty$

B- Soit g la fonction définie sur $[0 , \pi/2]$ par

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{1+f_1(x)}{x} & \text{si } x \# 0 \\ g(0) = 2 \end{cases}$$

1) a- Montrer que g est continue sur $[0 , \pi/2]$
   b- Montrer que $g(\alpha_1) = \frac{1}{\alpha_1}$

C- Soit λ €]0, $\pi/2$] et Ψ la fonction définie sur [0, $\pi/2$] par

$$\Psi(x) = \left[\frac{\sin\lambda - \lambda}{\lambda^2} \right] x^2 + x - \sin x$$

1)a) - Montrer que Ψ est dérivable sur [0, $\pi/2$]

b- Vérifier que $\Psi(0) = \Psi(\lambda)$

a- Déduire en utilisant le théorème des accroissements finis qu'il existe un réel c €]0, λ[tels que

$$\frac{\sin\lambda - \lambda}{\lambda^2} = \frac{\cos c - 1}{2c}$$

2) En déduire que g est dérivable en 0 et que g'(0) = 0

EXERCICE N°3(5points)

Dans le plan orienté , on considère un rectangle ABCD de centre O tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$

On note D' le symétrique de B par rapport à A

1) a- Montrer que (OD') est la médiatrice de [BD]

b- Montrer que ($(\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{OD'}})$) $\equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$

2) Soit R la rotation qui envoie A en O et B en D et f = $S_{(OD'')}$ o$S_{(AD)}$

a- Montrer que R a pour angle $\frac{2\pi}{3}$. Déterminer l'angle de f

b- Déterminer R o f (D) puis caractériser Rof , en déduire que R = f^{-1}

3) a- Montrer que R(D) = D' et construire le point C' = R(C)

b- Soit g = $S_{((OD')')}$ o R . Déterminer g(B) puis caractériser g

c- Construire G = g(C) et montrer que D' = C' * G

EXERCICE N°4(3points)

Soit f la fonction définie sur [0 ,2] par f(x) = $\sqrt{x(2-x)}$

Soit F une primitive de f tel que F(0) = 0 et G la fonction définie sur [0 , $\frac{\pi}{2}$] par

G(x) = F(1+ sinx)

1) a)Montrer que G est dérivable sur [0 , $\frac{\pi}{2}$] et calculer G'(x)

b) Déduire l'expression de G(x)

2) Calculer F(2) et F($\frac{3}{2}$)