

EXERCICE N : 3 (4 points)

Soit la fonction F définie sur $] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} [\setminus \{ 0 \}$ par : $F(x) = \int_2^{1+\tan^2(x)} \frac{dt}{t\sqrt{t-1}}$.

1) a) Justifier l'existence de F sur $] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} [\setminus \{ 0 \}$.

b) Montrer que la fonction F est paire .

c) Calculer $F(\frac{\pi}{4})$.

2) a) Montrer que F est dérivable sur $] 0 ; \frac{\pi}{2} [$ et calculer $F'(x)$ pour tout $x \in] 0 ; \frac{\pi}{2} [$.

b) En déduire que pour tout $x \in] 0 ; \frac{\pi}{2} [$; $F(x) = 2x - \frac{\pi}{2}$.

c) Expliciter $F(x)$ pour tout $x \in] -\frac{\pi}{2} ; 0 [$.

d) Calculer alors l'intégral : $J = \int_2^4 \frac{dt}{t\sqrt{t-1}}$.

3) On considère la suite (I_n) définie sur \mathbb{N} par : $I_n = \int_2^4 \frac{\sqrt{t-1}}{t^{n+2}} dt$.

a) Calculer I_0 .

b) Montrer que la suite (I_n) est décroissante sur \mathbb{N} .

c) Montrer que la suite (I_n) est convergente .

EXERCICE N : 4 (5 points)

A) On donne : $f(Z) = Z^2 - (i + 2 \sin \theta) Z + 1 - \cos \theta + i \sin \theta$; où $Z \in \mathbb{C}$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

1) Montrer que : $-(2 \cos \theta - 1)^2 = 4 \sin^2 \theta + 4 \cos \theta - 5$.

2) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $f(Z) = 0$.

B) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . On donne les points

$A_{(1+\frac{i}{2})}$, $B_{(-1+\frac{i}{2})}$, M_1 et M_2 d'affixes respectives : $Z_1 = \sin \theta + i \cos \theta$ et $Z_2 = \sin \theta + i(1 - \cos \theta)$.

1) Soit I le milieu de $[M_1 M_2]$. Déterminer et construire l'ensemble des points I lorsque θ varie dans \mathbb{R}

2) Soit $\sigma : P \rightarrow P$; $M_Z \mapsto M'_Z$ tel que $Z' = \bar{Z} + i$.

a) Prouver que $\sigma \circ \sigma$ est l'identité du plan .

b) Déduire la nature de σ et se(s) caractéristique(s) .

C) Dans cette question $\theta \in] 0 ; \pi [$.

1) a) Mettre Z_1 et Z_2 sous forme exponentielle .

b) Déterminer et construire (Γ) l'ensemble des points M_1 lorsque θ varie dans $] 0 ; \pi [$.

c) En utilisant l'application σ déduire la construction de (Γ') l'ensemble des points M_2 lorsque θ varie dans $] 0 ; \pi [$.

2) On donne $g(Z) = Z^2 - (2 \sin \theta - i) Z + 1 - \cos \theta - i \sin \theta$.

a) Prouver que : $g(Z) = 0$ signifie que $f(\bar{Z}) = 0$.

b) Déduire alors dans \mathbb{C} les solutions de l'équation : $g(Z) = 0$.

c) Ecrire $P(Z) = f(Z)g(Z)$ en produit de deux polynômes du second degré à coefficients réels.

EXERCICE N : 5 (5.5 points)

A) Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

On a tracer dans l'annexe ci-jointe la courbe (**Cf**) représentative de f dans un repère **R** orthonormé .

1) a) Dresser le tableau de variations de f .

b) Montrer que f réalise une bijection de \mathbb{R} sur un intervalle **J** que l'on précisera .

2) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

3) Tracer la courbe (**Cf⁻¹**) dans le repère **R** .

B) Soit la suite (U_n) définie sur \mathbb{N}^* par : $U_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

1) Calculer U_1 et interpréter graphiquement U_1 .

2) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq U_n \leq \frac{1}{(n+1)}$.

b) Dédurre alors la limite de (U_n) .

C) Pour tout entier naturel $n \geq 3$; on donne : $I_n = \int_0^1 x^{n-2} \sqrt{1+x^2} dx$.

1) a) Vérifier que pour tout entier naturel $n \geq 3$ on a : $U_n + U_{n-2} = I_n$.

b) A l'aide d'une intégration par parties portant sur I_n ,

montrer que pour tout entier naturel $n \geq 3$; $n U_n + (n-1) U_{n-2} = \sqrt{2}$.

2) a) Montrer que la suite (U_n) est décroissante sur \mathbb{N}^* .

b) En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 3$; $U_n \leq \frac{\sqrt{2}}{2n-1}$.

c) Donner alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n U_n)$.

4) Dans l'annexe ci-jointe on a tracé la courbe de la fonction g définie par : $g(x) = \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}$.

Dédurre de ce qui procède l'aire **A** de la partie hachurée .



Nom et Prénom :

Annexe à rendre avec la copie

