

REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION Lycée Ibn Khaldoun Jammel - Monastir		Mr : Afli Ahmed	
		Devoir de Synthèse n°1	
SECTION :	Mathématiques		
EPREUVE :	MATHEMATIQUES	DUREE : 3h	COEFFICIENT : 4

❖ **Exercice 1 :** (5points)

Soit l'équation (E) : $z^2 - 2(a + 2i)z + 2a^2 + 4ia - 4 = 0$; a est un paramètre complexe.

1. / Résoudre dans \mathbb{C} , l'équation (E).
2. / Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les points M, P, Q d'affixes respectives : a, $z_1 = (1 + i)a + 2i$ et $z_2 = (1 - i)a + 2i$
 - a. Montrer que : $z_2 = -iz_1 - 2 + 2i$
 - b. En déduire que Q est l'image de P par une rotation dont on précisera le centre I et l'angle α .
 - c. On suppose que a est non nul et on note J le milieu de [PQ].
 - i..Montrer que J est l'image de M par une translation que l'on précisera.
 - ii..Montrer que (IJ) et (PQ) sont perpendiculaires.
3. / Soit g l'application du plan dans lui-même qui à tout point M(z) on associe le point M'(z') tel que : $z' = i\bar{z} - 2 - 2i$
 - a. Montrer que g est un antidéplacement.
 - b. Déterminer g(I) et g(O)
 - c. Montrer que l'écriture complexe de $g \circ g$ est : $z'' = z - 4 - 4i$
 - d. Caractériser alors g.

❖ **Exercice 2 :** (4points)

Soit ABC un triangle isocèle et rectangle tel que $(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ et soit O le milieu de [AC].

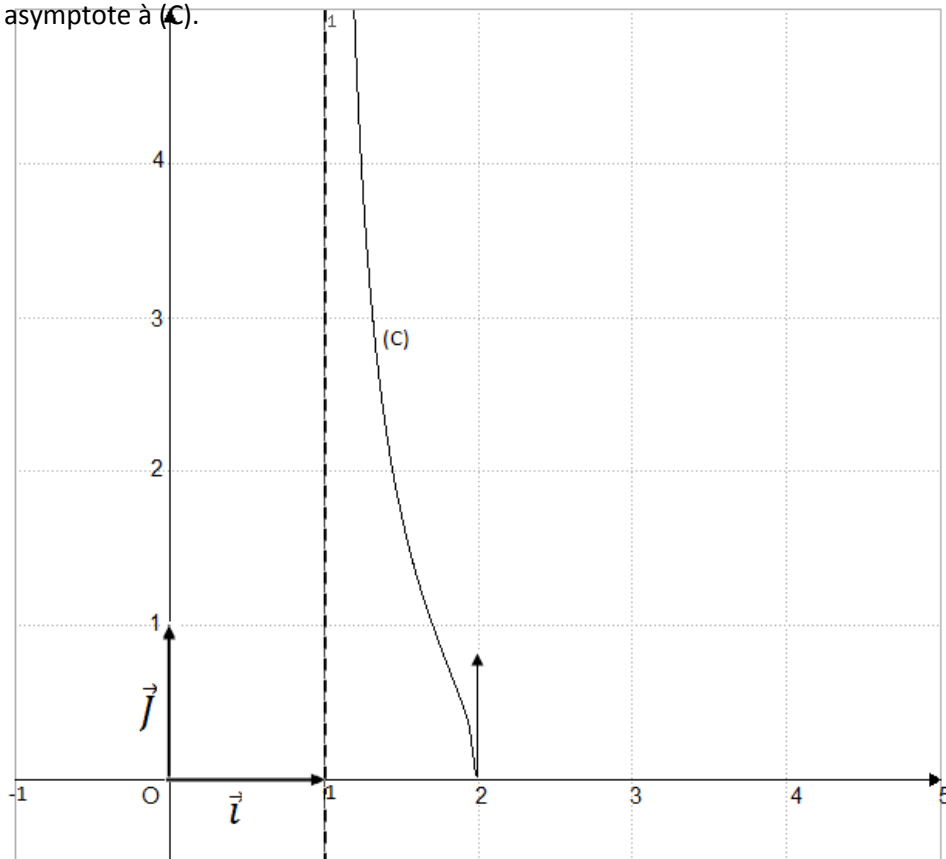
On désigne par I le milieu de [OB] et par D le symétrique de O par rapport à (BC).

1. a. Montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que $f(A) = C$ et $f(O) = D$
 - b. Montrer que f est une rotation de centre B et d'angle $(-\frac{\pi}{2})$
 - c. Soit $K = f(I)$. Montrer que K est le milieu de [BD].
2. On pose $g = S_{(BO)} \circ S_{(AB)} \circ f^{-1}$.
 - a. Déterminer g(B) et g(C)
 - b. En déduire que $f^{-1} = S_{(AB)} \circ S_{(BO)}$
3. On pose $h = S_{(OD)} \circ f^{-1}$. On désigne par (Δ) la médiatrice du segment [BD].
 - a. Déterminer h(B) et h(D)
 - b. Montrer que h est la symétrie glissante d'axe (Δ) et de vecteur \overrightarrow{BO} .
4. Déterminer l'ensemble des points M du plan tel que : $h(M) = f(M)$.
5. Caractériser l'application $S_{(BO)} \circ h$.

❖ **Exercice 3 :** (6points)

-La courbe ci-dessous est la représentation graphique (C) d'une fonction f définie sur $]1,2]$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

-La droite d'équation $x = 1$ est une asymptote à (C).



1. Par lecture graphique :

- Montrer que f n'est pas dérivable à gauche en 2 et donner $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x)}{x-2}$
- Montrer que f réalise une bijection de $]1,2]$ sur un intervalle J que l'on précisera.
- Montrer que f^{-1} est dérivable à droite en 0 et déterminer $(f^{-1})'_d(0)$

2. On admet que $f(x) = \frac{\sqrt{2x-x^2}}{x-1}$

- Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $]1,2]$ une unique solution α et que $\frac{3}{2} < \alpha < 2$
- Montrer que $(f^{-1})(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \quad \forall x \in [0, +\infty[$

3. Soit la suite (T_n) définie par $T_0 = 1$ et $T_{n+1} = f^{-1}(T_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Montrer que tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n \in [1; 2]$
- Montrer que pour tout $x \in [1; 2]$, $|(f^{-1})'(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$
- Montrer que tout $n \in \mathbb{N}$; $|T_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} |T_n - \alpha|$.
- En déduire que la suite (T_n) est convergente et déterminer sa limite.

4. Soit φ la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ par :
$$\begin{cases} \varphi(x) = \frac{1}{f^{-1}(\tan(2x))} \text{ si } x \in [0, \frac{\pi}{4}[\\ \varphi(\frac{\pi}{4}) = 1 \end{cases}$$

- Montrer que $\forall x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ on a : $\varphi(x) = \frac{1}{1 + \cos(2x)}$
- Montrer que φ réalise une bijection de $[0, \frac{\pi}{4}]$ sur $[\frac{1}{2}, 1]$
- Montrer que φ^{-1} est dérivable $]\frac{1}{2}, 1]$ et que : $(\varphi^{-1})' = \frac{1}{2x\sqrt{2x-1}}$

❖ **Exercice 4 :** (5points)

Soit f la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ par : $f(x) = \frac{2 \sin x}{1 - \sin x}$

(C) désigne sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O,I ,J)

1. Etudier f et tracer (C).(préciser la demi-tangente en 0)
2. a. Montrer que f admet une fonction réciproque g définie sur $[0 ; +\infty[$. Déterminer $g(0)$ et $g(2)$
b. Tracer la courbe représentative (C') de g dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.en déduire la position de (C') par rapport à la droite $\Delta : y = x$
c. Montrer que g est dérivable sur $[0 ; +\infty[$ et que $g'(x) = \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}}$
3. Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$
a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 2$
b. Montrer que (u_n) est décroissante, en déduire que (u_n) est convergente et donner sa limite.
4. Soit (v_n) la suite définie sur \mathbb{N}^* par : $v_n = n \left[g \left(u_n + \frac{2}{n} \right) - g \left(u_n + \frac{1}{n} \right) \right]$
a. Montrer que pour tout n de \mathbb{N}^* , il existe $c_n \in] u_n + \frac{1}{n} ; u_n + \frac{2}{n} [$ tel que $v_n = \frac{1}{(2+c_n)\sqrt{1+c_n}}$
b. En déduire que (v_n) est convergente et déterminer sa limite.

Bon Travail

