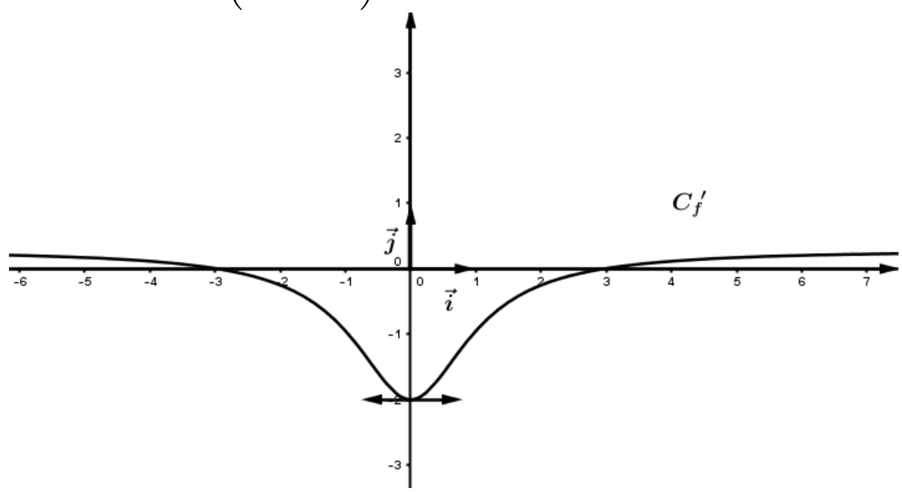
Devoir de Synthèse N:1

Exercice N:1 (3 p)

Pour chacune des questions, une et une seule affirmation est exacte .
Indiquer sur votre copie le numiro de la question et recopier l'affirmation exacte

On considère une fonction dérivable f définie sur $\mathbb{R}$,tel que $f(0) = 0$ et $C_{f'}$ la courbe représentative de la fonction f' dans un repère orthonormé $\left(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}\right)$.

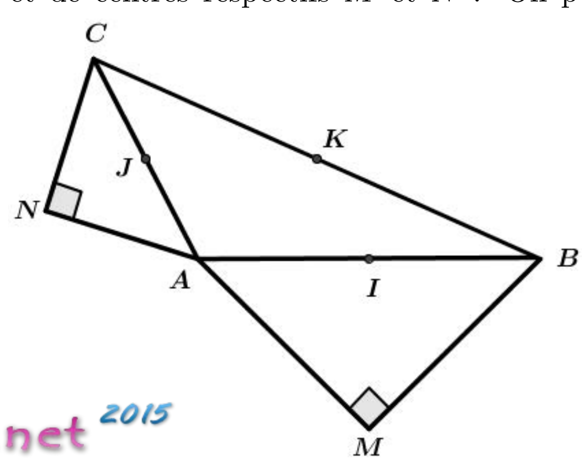


1. La fonction f est : **i**/ paire **ii**/ impaire **iii**/ ni paire ni impaire .
2. C_f la représentation de f admet : **i**/ un point d'inflexion en -3 **ii**/ un point d'inflexion en 0 **iii**/n'admet pas un point d'inflexion
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin x)}{x}$ est égal à : **i**/ -2 **ii**/ 0 **iii**/ n'existe pas

Exercice N:2(5 p)

ABC est un triangle direct. On désigne par I, J et K les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[AC]$et$[BC]$. On construit extérieurement à ce triangle les triangles ABM et ACN rectangles et isocèles en M et N.

1. (a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que $f(I) = J$ et $f(M) = K$.
   (b) Déterminer l'angle de f .
   (c) Montrer que $f(K) = N$.
   (d) Déterminer $f \circ f(M)$,et déduire que le centre O de f est le milieu de $[MN]$.
2. On considère les rotations r_1 et r_2 de même angle $-\dfrac{\pi}{2}$, et de centres respectifs M et N . On pose $g = r_1 \circ r_2 \circ S_\Delta$. où Δ la médiatrice de $[MK]$.
   (a) Caractériser l'application $r_1 \circ r_2$.
   (b) Montrer que g est une symétrie glissante .
   (c) Trouver la forme réduite de g.



Exercice N:3(5 p)

le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$, soit $\theta \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2+(2\cos\theta)\,z+1=0$.
2. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $P(z)=z^3-(1-2\cos\theta)z^2+(1-2\cos\theta)z-1=0$
   (a) Vérifier que $\overline{P(z)}=P(\overline{z})$, et déduire que si z une solution de (E) alors $\overline{z}$ est une solution de (E) .
   (b) Montrer que l'équation (E) admet une solution réelle que l'on déterminera.
   (c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) .
3. On désigne par A , B et C les points d'affixes respectives 1 , $e^{i(\pi-\theta)}$ et $e^{i(\pi+\theta)}$.
   (a) Montrer que $\dfrac{e^{i(\pi+\theta)}-1}{e^{i(\pi-\theta)}-1}=e^{i\theta}$.
   (b) En déduire que le triangle ABC est isocèle de sommet prinsipal A .
4. Déterminer l'affixe de point D pour que $ADBC$ soit un parallélogramme .

Exercice N:4(7 p)

1. On considère la fonction $\varphi(x)$ définie sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ par : $\varphi(x)=\tan x$.
   (a) Montrer que φ réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervale J que l'on déterminera .
   (b) Note g la fonction résiproque de φ ,Montrer que g dérivable sur J et que $g'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$.
   (c) Montrer que pour tout $x\in[0;+\infty[$: $g(x)+g\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{\pi}{2}$.
2. On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x)=2\sqrt{x^2+1}\,g\,(x)$.
   (a) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}\,g\left(\dfrac{1}{x}\right)=1$.
   (b) En déduire que la droite d'équation: $y=\pi x-2$ est une asymptôte oblique à C_f au voisinage de $+\infty$.
3. (a) Montrer que f est dérivable sur $[0;+\infty[$, est que $f'(x)>2$ pour tout $x>0$.
   (b) En déduire que pour tout $x\geqslant 0$, $f(x)\geqslant x$.
   (c) Montrer que f est une bijection de $[0;+\infty[$ sur $[0;+\infty[$.
4. Montrer que f^{-1} dérivable sur $]0;+\infty[$ et que $0<\left(f^{-1}\right)'(x)<\dfrac{1}{2}$, pour tout $x\in]0;+\infty[$.
5. On considère la suite (u_n) définie par : $u_0\in]0;1[$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=f^{-1}(u_n)$.
   (a) Démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$; $0<u_n<1$.
   (b) Montrer que la suite (u_n) décroissante .Et déduire qu'elle est convergente .
   (c) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$; $u_n<\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ .Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.