Profs	Marrouki & Mechmeche	Devoir de synthèse N°1	Matière	Maths
Lycée	Borj-cedria		Date	09/12/2014
Niveau	$4^{ème}$ Maths 1 & 2		Durée	3 h

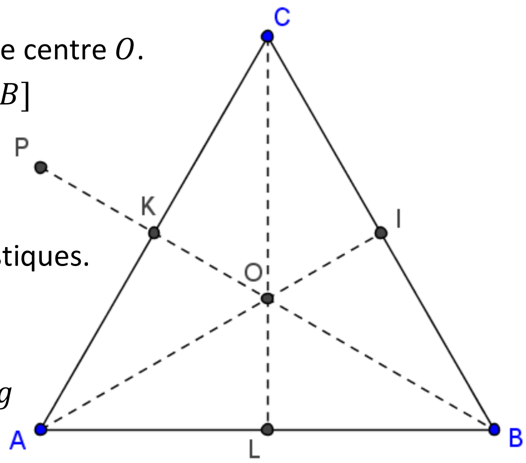
Exercice 1 : QCM(3pts)

Répondre par vrai ou faux en justifiant votre réponse.
Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$

1) Si pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f'(x) \geq f'(0)$ alors $A(0, f(0))$ est un point d'inflexion de C_f
2) Il existe un réel a tel que $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)-f'(a)}{x-a} = -\infty$
3) Si pour tout $x \in \mathbb{R}$ $|f'(x)| \leq 1$ alors pour tout réel a on a $f(a) - 1 \leq f(a+1) \leq f(a) + 1$

Exercice 2 : (6 pts)

Dans la figure ci-contre ABC est un triangle équilatéral direct de centre O.
I , K et L les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$
les points O et P sont symétriques par rapport à (AC)



1) Montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que
$f(B) = A$ et $f(A) = C$ et donner ses éléments caractéristiques.
2) On pose $g = S_{(AC)} \circ f$
a) Déterminer $g(A)$ et $g(B)$
b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de g
3) On pose $O' = T_{\overrightarrow{IC}}(O)$, montrer que $O' = S_{(KL)}(P)$
4) Soit $h = f \circ T_{\overrightarrow{CI}}$. Déterminer $h(K)$ puis la nature et les éléments caractéristiques de h
5) Soit R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$
a) Montrer que $R = S_{(OB)} \circ g$
b) En déduire que $S_{(OB)} \circ R = S_{(AC)} \circ f$ puis caractériser $f \circ R^{-1}$
6) Soit D le symétrique de C par rapport à (AP)
a) Montrer que $g(C) = D$
b) En déduire que $(AC) = med[BD]$

Exercice 3 : (8 pts)

Soit la fonction f définie sur $[-1,0[\cup]0,1]$ par $f(x) = 2 - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, on note C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

Partie A

1) a) Montrer que le point $\Omega(0,2)$ est un centre de symétrie de C_f.
b) Etudier la dérivabilité de f sur $]0,1]$ et montrer que $f'(x) = \frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}$ pour tout $x \in]0,1[$

c) Dresser le tableau de variation de f sur $]0,1]$.

d) Tracer C_f.

2) Soit g la restriction de f à l'intervalle $]0,1]$

a) Montrer que g réalise une bijection de $]0,1]$ sur $]-\infty, 2]$

b) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $]-\infty, 2]$

c) Expliciter $g^{-1}(x)$.

e) Tracer $C_{g^{-1}}$ dans le même repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

3) Soit la fonction h définie sur $]-\infty, 1]$ par $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}} - 1$

a) Vérifier que pour tout $x \in]-\infty, 1]$ $h(x) = g^{-1}(x+1) - 1$

b) En déduire que C_h est l'image de C_g par un antidéplacement que l'on caractérisera.

Partie B

1) a) Dresser le tableau de variation de g' sur l'intervalle $]0,1[$.

b) En déduire que pour tout $x \in]0,1[$ $g'(x) \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$

c) Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet une unique solution $\alpha \in \left]\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right[$

2) Soit la suite U définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = g^{-1}(u_n)$

a) Montrer que $u_n \leq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

b) Montrer que pour tout $x \in]-\infty, 2]$ $|(g^{-1})'(x)| \leq \frac{2\sqrt{3}}{9}$

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2\sqrt{3}}{9}|u_n - \alpha|$

d) Montrer alors que la suite U converge vers le réel α.

Exercice 4 : (3 pts)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{u}, \vec{v})$.
Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point $M(z), z \neq 0$ associe le point $M'(z')$ tel que $z' = \frac{-i}{\bar{z}}$. On donne les points $A(-i)$ et $B(-1)$.

1) a) Montrer que $\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM'}}\right) \equiv \left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM}}\right) + \frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$

b) En déduire que $(OM) \perp (OM')$

2) a) Vérifier que $\overline{z' + i} = -i\,\frac{z+1}{z}$

b) En déduire que si M est un point du cercle C de centre B et rayon 1 alors $|z' + i| = |z'|$

3) Soit le point $M\left(-\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

a) Montrer que M appartient au cercle C de centre B et rayon 1

b) Construire le point M et son image M' par f.

Bon travail.