Lycée Jammel 3 Lycée Menzel Hayet	Devoir de Synthèse n °1 Classe 4 M Durée :3h	Afli Ahmed Lejmi Malika

Exercice 1:

I. *Soit* $\theta \in]0,\pi[$ *et l'équation, dans* $\mathbb{C}$, *(E) :* $z^2 - i(2+e^{i\theta})z - (1+e^{i\theta}) = 0$

1. / *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation (E).on notera* z_1 *la solution imaginaire pure et* z_2 *l'autre solution*

2. / *Dans le plan complexe rapporté au repère* $(O,\vec{u},\vec{v})$ *, on considere les points* M_1 *et* M_2 *d'affixe respective*

$z_1 = i$ et $z_2 = ie^{i\theta} + i$

a. *Montrer que* M_2 *est l'image de* M_1 *par une rotation R de centre* $\omega\left(\frac{i}{1-e^{i\theta}}\right)$

b. *Mettre* z_ω *sous forme exponentielle.*

c. *Montrer que* ωM_1M_2 *est isocèle et déterminer* θ *pour qu'il soit rectangle.*

II. *Le plan P est rapporté à un repère* $(O,\vec{u},\vec{v})$*.on designe par* Ω *le point d'affixe 3.*

On considère l'application f_α *qui à tout point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe Z' telle que*

$Z' = (\cos\alpha + i\sin\alpha)Z + 3(1 - \cos\alpha - i\sin\alpha)$

a. *Montrer que* f_α *est une isométrie du plan .*

b. *Montrer que pour tout* $\alpha \in]0,\pi]$ f_α *possède un unique point invariant à préciser.*

c. *Caractériser* f_α

Exercice 2:

On considère dans le plan orienté un triangle ABC isocèle direct tel que $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$

(Voir figure à compléter sur la feuille des annexes)

On désigne par I et J les milieux respectifs de [AB] et [AC]

Soit (C) le cercle de centre O circonscrit au triangle ABC.

1. / a. *Montrer qu'il un déplacement unique f tel que f(A) = C et f(B) = A. caractériser f.*

b. *Déterminer f(I).*

c. *Soit* Δ *la droite telle que* $f = S_{(OA)} \circ S_\Delta$.

Déterminer S_Δ *(A) , en déduire que* $\Delta = (OI)$.

2. /*La droite (OI) coupe (BC) en D. Le cercle (C') de centre B passant par D coupe (AD) en D et E*

a. *Soit D' = f(D). Montrer que D' =* $S_{(OA)}(D)$ *et que O, J et D' sont alignés.*

b. *Déterminer (C'') l'image de (C') par f.*

c. *En déduire f(E).*

3. / *Soit g l'antidéplacement tel que : g(A) = C et g(B) = A*

a. *Montrer que g est une symétrie glissante que l'on caractérisera.*

b. *Caractériser* $g^{-1} \circ f$.

Exercice 3:

Soit la fonction f définie sur $[1\,,+\infty[$ *par* $f(x) = \sqrt{x^2-1}+x$

1. / a. *Etudier la dérivabilité de f à droite en 1.*

   b. *Interpréter graphiquement le résultat obtenu.*

2. / *Dresser le tableau de variation de f.*

3. / a. *Montrer que f réalise une bijection de* $[1\,,+\infty[$ *sur un intervalle J à préciser.*

   b. *Calculer* $f^{-1}(x)$ *pour tout* $x \in J$.

4. / *On désigne par (C) et (C') les courbes représentatives de f et de* f^{-1} *dans un repere orthonormé* $(O,\vec{u},\vec{v})$

   a. *Montrer que la droite d'équation* $y = 2x$ *est une asymptote oblique à (C).*

   b. *Construire les courbes (C) et (C')*

5. / *Soit la fonction g définie sur* $[0,\frac{\pi}{2}[$ *par* $g(x) = f(\frac{1}{\cos x})$

   a. *Montrer que pour tout* $x \in [0,\frac{\pi}{2}[$ *on a* $g(x) = \dfrac{1+\sin x}{\cos x}$

   b. *Montrer que g réalise une bijection de* $[0,\frac{\pi}{2}[$ *sur un intervalle K à préciser*

   c. *Montrer que :* $\left[\ g(y) = x\ ,\ y\in[0,\frac{\pi}{2}[\quad \Longleftrightarrow \quad \cos y = \frac{2x}{1+x^2}\ ,\ x \in [1\,,+\infty[\ \right]$

   d. *Montrer que* g^{-1} *est dérivable sur K et pour tout* $x \in K$ *on a :* $(g^{-1})'(x) = \frac{2}{x^2+1}$

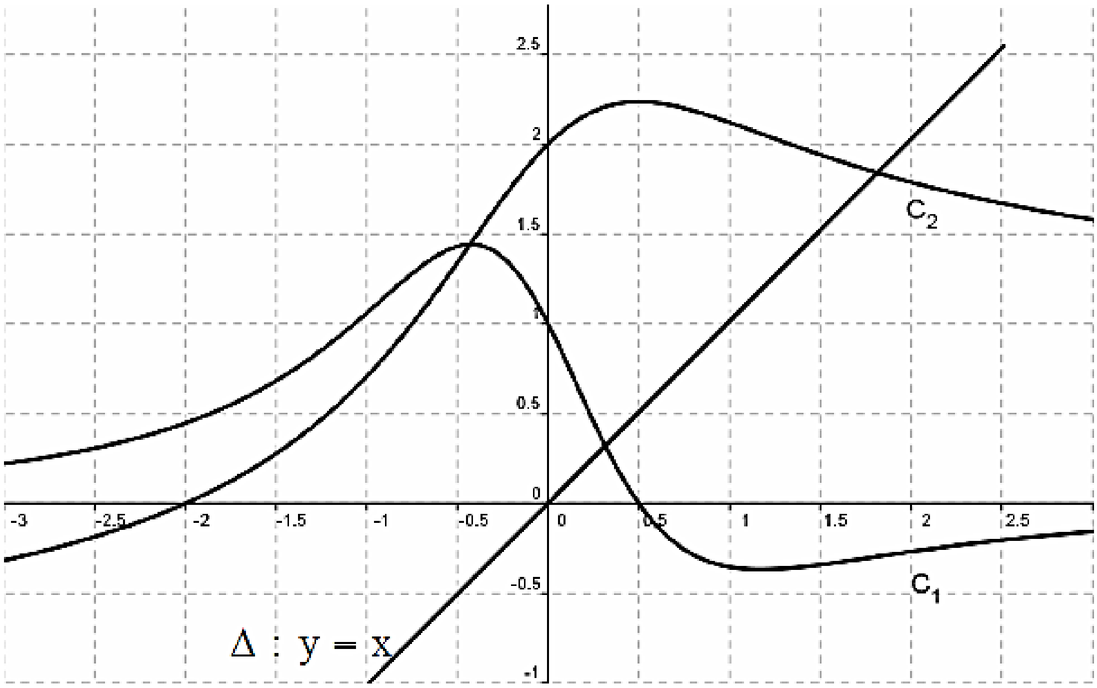
6. / *On pose* $u_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} g^{-1}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$ $;\ n \in \mathbb{N}^*$

   a. *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *on a :* $g^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right) \le u_n \le g^{-1}\left(1+\frac{2}{n}\right)$

   b. *En déduire que* (u_n) *est convergente et donner sa limite.*

Exercice 4 :

Dans la figure ci-dessous, C_1 *et* C_2 *sont les courbes representatives d'une fonction f définie sur* [-3,3] *et de sa fonction dérivée f '.*



<u>*L'élève utilisera le graphique ci-dessus comme source des données.*</u>

1. /*Justifier que* C_1 *ne peut pas être la courbe de f.*

2. /*Déterminer* $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-2}{x}$

3. /*Montrer que l'équation f(x) = x admet dans* $]\frac{3}{2}, 2[$ *une solution unique* α.

4. / *Soit U la suite définie sur* $\mathbb{N}$ *par :* $U_0 = \frac{3}{2}$ *et* $U_{n+1} = f(U_n)$; $\forall\, n \in \mathbb{N}$

- a. / *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\frac{3}{2} \leq U_n \leq 2$
- b. / *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$
- c. / *En déduire que* $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|U_n - \alpha| \leq (\frac{1}{2})^n$.*Déterminer alors* $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

Bonne Réflexion

Exercice 2 :

Annexe