

# Devoir de synthèse N1

## Exercice1 : ( 3 points) Répondre par vrai ou faux

- 1) Si  $(U_n)$  est une suite décroissante et converge vers 0 alors les suites  $(U_n)$  et  $(-U_n)$  sont adjacentes
- 2) La suite réelle définie par  $U_0 = 1$  et  $U_{n+1} = U_n + n$  est une suite arithmétique
- 3) Pour tous réels  $a, b$  on a  $|\cos(2a) - \cos(2b)| \leq 2|a - b|$
- 4) Deux antidéplacements qui fixent un même point sont égaux

## Exercice2 : (4 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$

Soit l'application  $f$  de  $P \setminus \{A\}$  dans  $P$  qui à tout point  $M$  d'affixe  $z$  associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  où

$$z' = \frac{z-1+2i}{z-1} \text{ et soit les points } A \text{ et } B \text{ d'affixes respectives } 1 \text{ et } 1-2i$$

- 1) Montrer que  $f$  admet deux points invariants  $I$  et  $J$  qu'on précisera les affixes
- 2) Montrer que pour tout  $M \neq A$ ,  $f \circ f(M) = M$
- 3) a) Montrer que  $OM' = \frac{BM}{AM}$  et déduire l'image de la médiatrice de  $[AB]$  par  $f$   
 b) Montrer que  $(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) \equiv (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM})[2\pi]$  et déduire l'image du cercle de diamètre  $[AB]$  privé de  $A$
- 4) a) Calculer  $(z'-1)(z-1)$  et déduire que  $AM' \cdot AM = 2$  et  $(\vec{u}, \overrightarrow{AM'}) + (\vec{u}, \overrightarrow{AM}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$   
 b) Soit  $M$  un point d'affixe  $1 + e^{i\alpha}$  où  $\alpha$  est un réel donné, construire son image  $M'$  par  $f$

## Exercice 2 : (3 points)

Dans la figure 1 de l'annexe ci-jointe on donne le tableau de variations d'une fonction  $f$  dérivable sur  $\mathbb{R}$  et vérifiant  $f(0) = \frac{1}{4}$  et pour tout  $x \in [-1, 1]$ ,  $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

- 1) Justifier que l'équation  $f(x) = x$  admet une solution unique  $\alpha$  dans  $[-1, 1]$
- 2) Soit la suite réelle  $(U_n)$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $U_0 = \frac{1}{4}$  et  $U_{n+1} = f(U_n)$   
 a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_n \in [-1, 1]$   
 b) Montrer que pour tout  $n$ ,  $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$   
 c) Montrer que  $(U_n)$  est convergente et déterminer sa limite

$$3) \text{ Soit } V_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Montrer que pour tout  $n$ ,  $f\left(\frac{1}{n}\right) \leq V_n \leq f\left(\frac{1}{n^2}\right)$  et déduire la limite de  $(V_n)$

#### **Exercice4 : (5points)**

Le plan est orienté dans le sens direct .Soit  $ABC$  un triangle isocèle et rectangle tel que  $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

Soit  $O$  ,  $I$  et  $J$  les milieux respectifs des segments  $[AC]$  ,  $[OB]$  et  $[BC]$  et soit  $D$  le symétrique de  $O$  par rapport à  $(BC)$  et  $N$  le point d'intersection de  $(AD)$  et  $(BC)$  . **Voir figure 2**

1) Montrer que  $I$  est le milieu de  $[AD]$

2)a) Montrer qu'il existe un seul déplacement  $f$  qui transforme  $A$  en  $C$  et  $O$  en  $D$

b) Montrer que  $f$  est la rotation de centre  $B$  et d'angle  $\frac{-\pi}{2}$

c) Soit  $I' = f(I)$  montrer que  $I'$  est le milieu de  $[BD]$

d) Dédurre que les points  $O$  ,  $N$  et  $I'$  sont alignés

3) Soit  $g = f \circ R$  où  $R$  est la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$  . Déterminer  $g(O)$  et caractériser  $g$

4) Soit  $h = S \circ f^{-1}$  où  $S$  est la symétrie orthogonale d'axe  $(AO)$

a) Déterminer  $h(D)$  et  $h(C)$

b) Montrer que  $h$  est une symétrie glissante et préciser ses éléments caractéristiques

c) Déterminer l'ensemble des points  $M$  tel que  $h(M) = f^{-1}(M)$

#### **Exercice 5 : (5 points)**

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  par  $f(x) = \frac{1-x^2}{x^2+1}$

On note  $C_f$  sa représentation graphique dans un repère orthonormé

1) Dresser le tableau de variation de  $f$

2) Montrer que  $f$  est une bijection de  $\mathbb{R}_+$  sur un intervalle  $J$  que l'on précisera

3) Construire dans le même repère les courbes  $C_f$  et  $C_{f^{-1}}$

4) soit la fonction  $g$  définie sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$  par  $g(x) = f(\tan(x))$  si  $x \neq \frac{\pi}{2}$  et  $g(\frac{\pi}{2}) = -1$

a) Montrer que  $g$  est continue sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$

b) Montrer que pour tout  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$  ,  $g(x) = \cos(2x)$

c) Montrer que  $g$  réalise une bijection de  $[0, \frac{\pi}{2}]$  sur  $[-1, 1]$

d) Montrer que  $g^{-1}$  est dérivable sur  $] -1, 1 [$  et calculer  $(g^{-1})'(x)$  pour tout  $x \in ] -1, 1 [$

e) Soit  $G(x) = g^{-1}(-x) + g^{-1}(x)$  pour tout  $x \in ] -1, 1 [$  . Montrer que  $G$  est dérivable sur  $] -1, 1 [$  et préciser  $G'(x)$

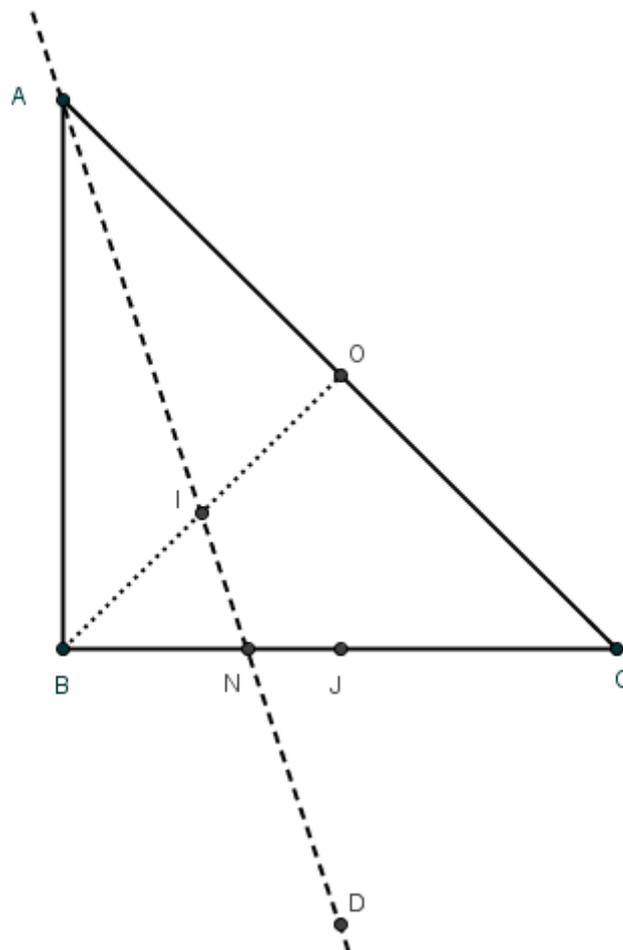
f) Montrer que  $G(x) = \frac{\pi}{2}$  pour tout  $x \in ] -1, 1 [$  . Que peut on conclure pour  $C_{g^{-1}}$ ?

Figure 1 : (Ex2)

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$	-	+	-	
$f(x)$	2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-2

$\swarrow$        $\nearrow$        $\searrow$   
 (Arrows indicate the mapping from the  $f(x)$  row to the  $f'(x)$  row: 2 to -, -1/2 to +, 1/2 to -, and -2 to -)

Figure 2 : (Ex 4)



## Correction du DS1

**Exercice 1 :** 1)V 2)F 3)V 4) F

### Exercice 2 :

1) Soit M un point d'affixe z et invariant par f,  $f(M) = M \text{ sig } z = \frac{z-1+2i}{z-1} \text{ sig } z(z-1) = z-1+2i \text{ sig } z^2 - 2z + 1 - 2i = 0$

On a  $\Delta = 4.2i = (2(1+i))^2$  et les solutions  $z_1 = -i$  et  $z_2 = 2+i$  ainsi il y a deux points invariants I(-i) et J(2+i)

2) Soit  $M \neq A$ ,  $M(z) \xrightarrow{f} M_1(z_1) \xrightarrow{f} M'(z')$  on a  $z_1 = \frac{z-1+2i}{z-1}$  et  $z' = \frac{z_1-1+2i}{z_1-1}$  d'où  $z' = \frac{\frac{z-1+2i}{z-1} - 1 + 2i}{\frac{z-1+2i}{z-1} - 1} = \frac{2iz}{2i} = z$

3a) On a  $z' = \frac{z-1+2i}{z-1}$  d'où  $|z'| = \left| \frac{z-1+2i}{z-1} \right|$  d'où  $OM' = \frac{BM}{AM}$  et ainsi  $M \in \text{med } [AB]$  eq  $OM' = 1$  eq  $M' \in C(O, 1)$

b) on a  $z' = \frac{z-1+2i}{z-1}$  d'où  $\arg(z') \equiv \arg\left(\frac{z-1+2i}{z-1}\right) [2\pi]$  eq  $(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) \equiv (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) [2\pi]$

ainsi  $M \in C([AB]) \setminus \{A\}$  eq  $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$  ou  $M = B$  eq  $(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$  et  $f(B) = O$  eq  $M \in (o, \vec{v})$

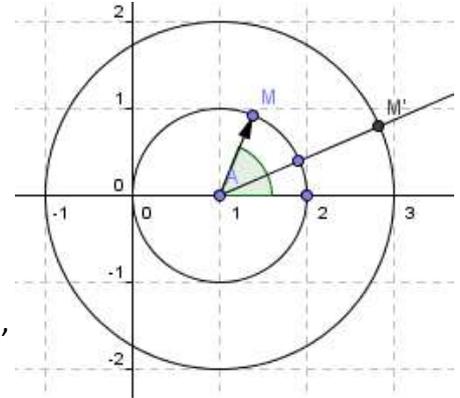
4a)  $(z'-1)(z-1) = \left(\frac{z-1+2i}{z-1} - 1\right)(z-1) = 2i$  Ainsi  $(z'-1)(z-1) = 2i$

eq  $|(z'-1)(z-1)| = |2i|$  et  $\arg((z'-1)(z-1)) \equiv \arg(2i) [2\pi]$

D'où  $AM' \cdot AM = 2$  et  $(\vec{u}, \overrightarrow{AM'}) + (\vec{u}, \overrightarrow{AM}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

b) M a pour affixe  $1 + e^{i\alpha}$  donc  $z-1 = e^{i\alpha}$  donc  $M \in C(A, 1)$

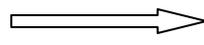
d'après 4b)  $AM' = 2$  et  $(\vec{u}, \overrightarrow{AM'}) \equiv \frac{\pi}{2} - \alpha [2\pi]$  d'où la construction de  $M'$



### Exercice 3 :

1) Soit  $g(x) = f(x) - x$  on a  $g$  est dérivable sur  $[-1, 1]$  et  $g'(x) = f'(x) - 1 < 0$  car  $|f'(x)| < \frac{1}{2}$ ,  $g(-1) = \frac{1}{2}$ ,  $g(1) = -\frac{1}{2}$

Ainsi  $\left\{ \begin{array}{l} g \text{ est continue sur } [-1, 1] \\ g(-1) \cdot g(1) < 0 \\ g \text{ est strictement décroissante sur } [-1, 1] \end{array} \right.$



l'équation  $g(x) = 0$  admet une seule solution  $\alpha$

dans  $[-1, 1]$

2a) \* pour  $n = 0$ ,  $U_0 = \frac{1}{4} \in [-1, 1]$

\* On suppose que  $U_n \in [-1, 1]$  (pour  $n \in \mathbb{N}$ ) donc  $f(U_n) \in f([-1, 1])$  or  $f([-1, 1]) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \subset [-1, 1]$  donc  $f(U_n) \in [-1, 1]$

Ainsi  $U_{n+1} \in [-1, 1]$

b) On a  $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$  pour tout  $x \in [-1, 1] \iff |f(U_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha| \iff |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha|$

c) On déduit que pour tout  $n$ ,  $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \left|\frac{1}{4} - \alpha\right|$  d'où  $(U_n)$  converge vers  $\alpha$  (car  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ )

3) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et pour tout entier  $k$  entre 1 et  $n$  on a  $\frac{1}{n^2} \leq \frac{k}{n^2} \leq \frac{n}{n^2}$  et comme  $f$  est croissante sur  $[-1, 1]$

On déduit que  $f\left(\frac{1}{n^2}\right) \leq f\left(\frac{k}{n^2}\right) \leq f\left(\frac{n}{n^2}\right)$  d'où  $\sum_{k=1}^n f\left(\frac{1}{n^2}\right) < \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right) < \sum_{k=1}^n f\left(\frac{1}{n}\right)$  d'où  $n f\left(\frac{1}{n^2}\right) < n V_n < n f\left(\frac{1}{n}\right)$

Et par suite  $f\left(\frac{1}{n^2}\right) < V_n < f\left(\frac{1}{n}\right)$  . Comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n^2}\right) = f(0) = \frac{1}{4}$  (f est continue en 0)

#### Exercice 4 :

1) O et D sont symétriques par rapport à (BC) donc  $J = B * C$  donc  $\vec{OD} = 2\vec{OJ} = 2\left(\frac{1}{2}\vec{AB}\right) = \vec{AB}$  donc  $A * D = B * O$

2) a) On a  $AO = CD$  en effet  $AO = CO = CD$  donc il existe un seul déplacement  $f / f(A) = C$  et  $f(O) = D$

b) L'angle du déplacement f est  $(\vec{AO}, \vec{CD}) \equiv (\vec{AO}, \vec{CO}) + (\vec{CO}, \vec{CB}) + (\vec{CB}, \vec{CD}) \equiv \pi + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \equiv \frac{-\pi}{2} [2\pi]$

donc f est une rotation d'angle  $\frac{-\pi}{2}$  Comme  $BA = BC$  et  $(\vec{BA}, \vec{BC}) \equiv \frac{-\pi}{2} [2\pi]$  Donc B est le centre de f

c) on a  $I = B * O$  donc  $f(I) = f(B) * f(O) = B * D$

d) Dans le triangle OBD (BJ) et (DI) sont deux médianes donc leur point d'intersection N est le centre de gravité de OBD et comme  $I' = B * D$  donc O, N et I' sont alignés

3)  $g(O) = f \circ R(O) = f(O) = D$  , g est la composée de deux rotations dont la somme des angles est 0 donc  $g = t_{\vec{OD}}$

4) a)  $h(D) = S \circ f^{-1}(D) = S(O) = O$  et  $h(C) = S \circ f^{-1}(C) = A$

b)  $\text{med}[DO] \neq \text{med}[CA]$  donc h est une symétrie glissante d'axe (JO) et de vecteur  $\vec{u} = \vec{Dh(D)} = \vec{DO}$  ( $D \in (JO)$ )

c)  $h(M) = f^{-1}(M)$  eq  $S(f^{-1}(M)) = f^{-1}(M)$  eq  $f^{-1}(M) \in (AO)$  eq  $M \in f(AO)$  eq  $M \in (CD)$

#### Exercice 5:

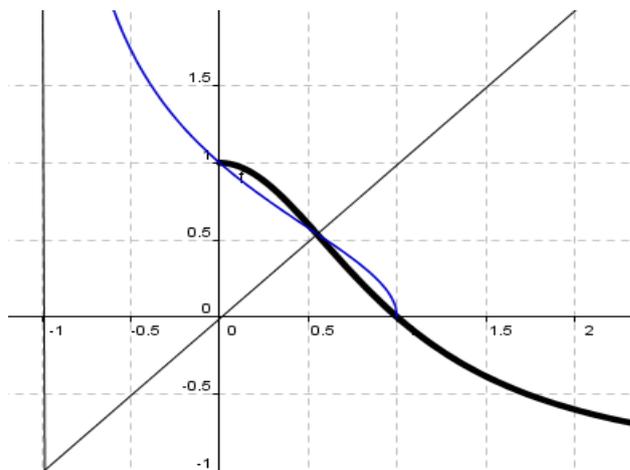
1) f est dérivable sur  $\mathbb{R}^+$  et  $f'(x) = \frac{-4x}{(x^2+1)^2} > 0$  sur  $\mathbb{R}^{*+}$

$f'(x)$	-
f	1

-1

2) f est continue et strictement décroissante sur  $\mathbb{R}^+$

Donc elle réalise une bijection de  $\mathbb{R}^+$  sur  $f(\mathbb{R}^+) = ]-1, 1]$



4) la fonction tangente est continue sur  $[0, \frac{\pi}{2}[$  et f est continue sur  $\mathbb{R}^+$  donc  $g = h \circ \tan$  est continue sur  $[0, \frac{\pi}{2}[$  et g est

continue en  $\frac{\pi}{2}$  car  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(\tan x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1 = g\left(\frac{\pi}{2}\right)$  donc g est continue sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$

b)  $g(x) = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \cos(2x)$  pour tout  $x \neq \frac{\pi}{2}$  et  $\cos(2 \cdot \frac{\pi}{2}) = -1 = g(\frac{\pi}{2})$

c) g est dérivable sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$  et  $g'(x) = -2\sin(2x) < 0$  sur  $]0, \frac{\pi}{2}[$  donc g est strictement décroissante sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$  Donc elle réalise une bijection de  $[0, \frac{\pi}{2}]$  sur  $f([0, \frac{\pi}{2}]) = [-1, 1]$

d) g est dérivable sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$  et  $g(x) \neq 0$  pour tout  $x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  donc  $g^{-1}$  est dérivable sur  $g(]0, \frac{\pi}{2}[) = ]-1, 1[$

et pour tout  $x \in ]-1, 1[$