| Mathématiques | Devoir de Synthèse N°1 | |
|---|---|---|
| Lycée Ghannouch | | |
| $4^{ème}$ Math<br>Date : le 04/12/2012 | Durée : 3 heures<br>Coefficient : 4 | Prof : Taieb |

## Exercice n°1 :(2pts)

Les trois questions suivantes sont indépendantes. Répondre par **Vrai** ou **Faux** à chacune des propositions données**.** **En justifiant votre réponse.**

**1-** Soit f une fonction continue sur [0, 1], strictement croissante sur [0, 1]

Et dérivable sur]0,1[. Si l'on sait de plus que f(0) = -1 et f(1) = 1, alors :

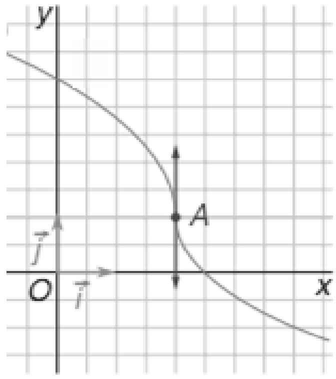
a) L'équation f(x) = 0 admet une unique solution α dans] 0, 1[.

b) L'équation f '(x) = -2 admet au moins une solution dans] 0, 1[.

**2-** (C) est la courbe représentative d'une fonction f passant par A(2,1)

a) f n'est pas dérivable en 2

b) A est un point d'inflexion de (C)




## Exercice n°2 :(4pts)

A- On considère, dans C l'équation (E) : $z^3-(3+3i)z^2+(1+6i)z+1-3i=0$

1) Vérifier que 1 est une solution de (E)
2) a- Déterminer deux nombres complexes a et b tes que :

$$z^3-(3+3i)z^2+(1+6i)z+1-3i=(z-1)(z^2+bz+c)$$

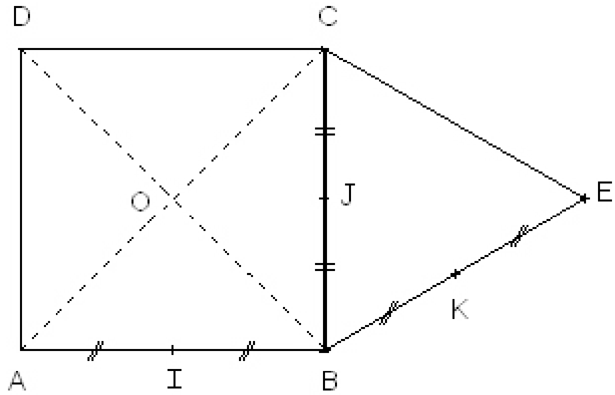
b- Résoudre, dans C l'équation (E)

B- Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$, on considère l'application f du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associé le point M' d'affixe z' telle que : $z'=i\overline{z}+1+i$

1) Montrer que f est une isométrie
2) Montrer que f n'admet pas des points invariants
3) On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives 1 ; -1 ; 1+2i et 1+i
   a- Montrer que f(A) = C et f(B) = A
   b- Montrer que f est une symétrie glissante que l'on caractérisera.

## Exercice n°3 :(4pts)

Le plan est orienté dans le sens direct.
Dans la figure ci-contre, ABCD est un carré direct de centre O et BEC est un triangle équilatéral direct.
Les points I, J et k sont les milieux respectifs des Segments [AB], [CB] et [EB].




1) a-Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui envoie A sur C et B sur D.
   b- Caractériser f.
   c-Déterminer la droite Δ telle que $f=S_\Delta oS_{(OI)}$

2) Montrer qu'il existe une unique symétrie glissante g qui envoie A sur C et B sur D.

3) a- Déterminer $(gof)(C)$ et $(gof)(D)$

b- Caractériser g o f

c-En déduire la forme réduite de g

4) Soit h l'antidéplacement qui envoie B sur E et C sur B

a- Déterminer h(J) et (h o h) (C)

b-Montrer que h est une symétrie glissante et déterminer la forme réduite.

**Exercice n°4 :(6pts)**

Soit f la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par : $f(x)=1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

1-a) Montrer que $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ .Interpréter ces résultats graphiquement

b) Montrer que $f'(x)=\dfrac{-1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$ puis dresser le tableau de variation de f

c)Montrer que pour tout $x\in[2,3]$ , $|f'(x)|\le\frac{1}{3\sqrt{3}}$

2-a) Montrer que l'équation f(x) = x admet une unique solution ∝ et que $\alpha\in]2,3[$

b) Tracer dans un repère orthonormé la courbe (Cf) de f

3-a) Montrer que f réalise une bijection de $]1,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera

b) Montrer que $f^{-1}(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$ $\forall x\in J$

c) Tracer la courbe ($C_{f^{-1}}$) de la fonction $f^{-1}$ dans le même repère que (Cf)

4-Soit la suite ($u_n$) définie sur IN par : $u_0=2$ et $u_{n+1}=f(u_n)$

a) Montrer que $\forall n\in IN$ , $2\le u_n\le 3$

b) Montrer que $\forall n\in IN$ $|u_{n+1}-\alpha|\le\frac{1}{3\sqrt{3}}|u_n-\alpha|$

c) En déduire $\forall n\in IN$ $|u_n-\alpha|\le(\frac{1}{3\sqrt{3}})^n\ |u_0-\alpha|$

d) En déduire que ($u_n$) est convergent et calculer sa limite.

**Exercice n°5 : (4pts)**

Soit f la fonction définie sur $]0,\frac{\pi}{2}]$ par f(x) = $\dfrac{1}{\sin x}$

1- a)Dresser le tableau de variation de f sur $]0,\frac{\pi}{2}]$

b) Montrer que f réalise une bijection de $]0,\frac{\pi}{2}]$ sur [1, +∞ [

2- a) $f^{-1}$ est-elle dérivable à droite en 1 .Justifier

b) Déterminer $f^{-1}(2)$ et $f^{-1}(\sqrt{2})$

c) Montrer que $f^{-1}$ est dérivable en $\sqrt{2}$ et déterminer $(f^{-1})'(\sqrt{2})$

3- Montrer que $f^{-1}$ est dérivable sur]1,+∞[et que $(f^{-1})'(x)=\dfrac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$ $\forall x\in]1,+\infty[$

**Bon Travail**