

Exercice 1: (3 points)

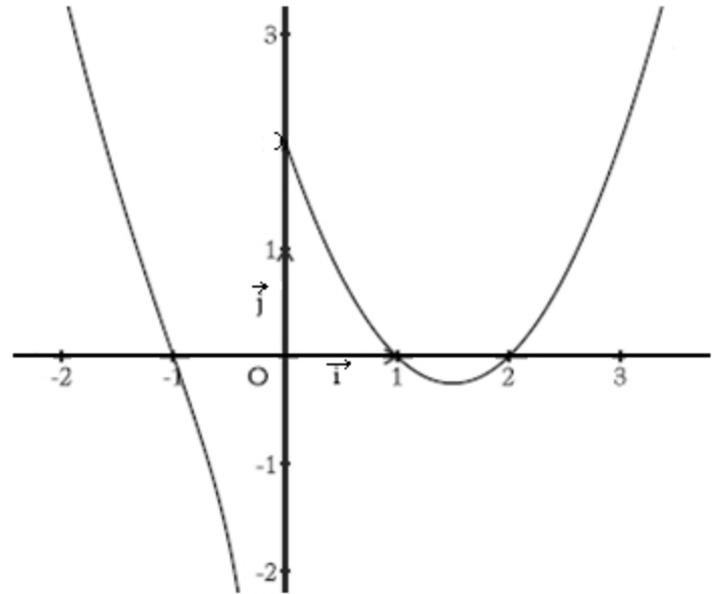
Pour chacune des questions suivantes, une seule des réponses proposées est exacte.

L'élève indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre qui correspond à la réponse choisie.

Aucune justification n'est demandée.

Une réponse fautive ou l'absence de réponse vaut 0 point

La courbe ci-contre est la représentation graphique, dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , d'une fonction f définie sur \mathbb{R}^* .



La courbe de f admet exactement:

- ✓ Une asymptote verticale d'équation $x = 0$.
- ✓ Deux branches infinies de direction celle de l'axe des ordonnées respectivement au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

1) La limite en $-\infty$ de la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ est égale à :

- a) 0 b) $-\infty$ c) $+\infty$

2) La limite en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto f(2 - x \sin(\frac{1}{x}))$ est égale à :

- a) 0 b) $-\infty$ c) $+\infty$

3) La limite en 0 de la fonction $x \mapsto f(\frac{x^2}{-1+\sqrt{1+x^2}})$ est égale à :

- a) 0 b) $-\infty$ c) $+\infty$

4) Le domaine de définition de $(f \circ f)$ est :

- a) \mathbb{R}^* b) $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1; 2\}$ c) $\mathbb{R}^* \setminus \{-1; 1; 2\}$

5) Le nombre de solution, dans $]0, 1[$, de l'équation $f \circ f(x) = -1$ est :

- a) 0 b) 1 c) 3

6) La limite à gauche en 0 de la fonction $x \mapsto \frac{f \circ f(x)}{x}$ est égale à :

- a) 0 b) $-\infty$ c) $+\infty$

Exercice 2: (4 points)

On considère les suites réelles (S_n) , (U_n) et (V_n) définies sur \mathbb{N}^* , par $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$, $U_n = S_{2n}$ et $V_n = S_{2n+1}$

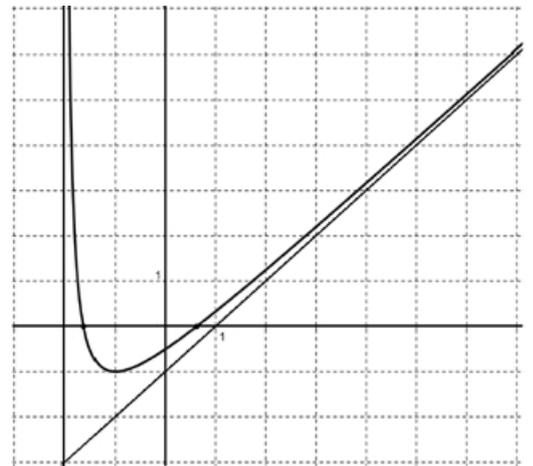
- 1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a: $U_n \leq V_n$
- 2) a- Montrer que la suite (V_n) est décroissante.
b- Montrer que (V_n) converge vers un réel $\alpha \leq \frac{5}{6}$
- 3) Montrer que la suite (U_n) est croissante.
- 4) Montrer que les suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.
- 5) Montrer que la suite (S_n) est convergente et déterminer sa limite.
- 6) a- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a: $U_n \leq \alpha \leq V_n$
b- Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $\frac{1}{2n+1} \leq 0,02$.
c- En déduire un encadrement de α à 0,02 près. (**indication** : $S_{51} \approx 0,702$).

Exercice 3: (4 points)

La courbe C_g ci-contre est la représentation graphique, dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , d'une fonction g définie et dérivable sur $] -2, +\infty [$.

La courbe C_g admet exactement:

- ✓ Une asymptote verticale d'équation $x = -2$.
- ✓ Une asymptote oblique d'équation $y = x - 1$.
- ✓ Une tangente horizontale au point d'abscisse -1.



A- Utiliser le graphique pour répondre aux questions suivantes:

- 1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x-1}$ et $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x)-x}{x+1}$
- 2) Dresser le tableau de variation de g sur $] -2, +\infty [$.

B- Soit f la fonction définie sur $] -2, +\infty [$ par $f(x) = g(x) - x + 2$.

- 1) Etudier la position de C_f par rapport à C_g . (C_f étant la courbe représentative de f).
- 2) a- Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse -1.
b- Etudier la position de C_f par rapport à T .
- 3) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$. Interpréter graphiquement ce résultat.
- 4) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ n'admet aucune solution dans $] -2, +\infty [$.

Exercice 4: (4 points)

A- On considère, dans \mathbb{C} , l'équation (E) : $z^3 - (3 + 3i)z^2 + (1 + 6i)z + 1 - 3i = 0$.

1) Montrer que l'équation (E) admet une solution réelle que l'on déterminera.

2) a- Déterminer deux nombres complexes a et b tels que :

$$z^3 - (3 + 3i)z^2 + (1 + 6i)z + 1 - 3i = (z - 1)(z^2 + az + b).$$

b- Résoudre, dans \mathbb{C} , l'équation (E).

B- Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) , on considère l'application f du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = i\bar{z} + 1 + i$.

1) Soit $M(z_1)$ et $N(z_2)$ deux points quelconques respectives M' et N' par f .

a- Montrer que $z'_2 - z'_1 = i\overline{(z_2 - z_1)}$.

b- En déduire que f est une isométrie du plan.

2) Montrer que f n'admet aucun point invariant.

3) On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $1, -1, 1 + 2i$ et $1 + i$.

a- Déterminer $f(A)$ et $f(B)$.

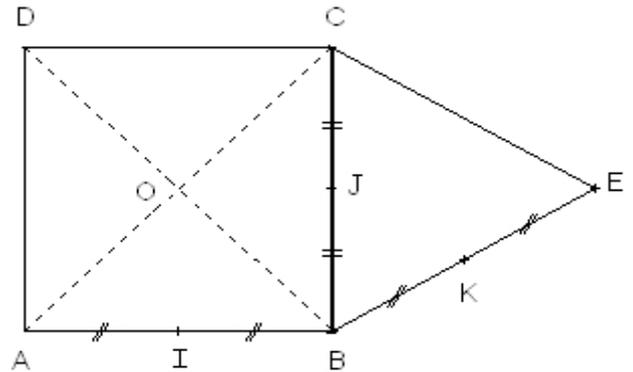
b- Montrer que f est une symétrie glissante que l'on caractérisera.

Exercice 5: (5 points)

Le plan est orienté dans le sens direct.

Dans la figure ci-contre, $ABCD$ est un carré direct de centre O et BEC est un triangle équilatéral direct.

Les points I, J et K sont les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[CB]$ et $[EB]$.



1) a- Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui envoie A sur C et B sur D .

b- Caractériser f .

c- Déterminer la droite Δ telle que $f = S_{\Delta} \circ S_{(O)}$.

2) Montrer qu'il existe une unique symétrie glissante g qui envoie A sur C et B sur D .

3) a- Déterminer $(g \circ f)(C)$ et $(g \circ f)(D)$.

b- Caractériser $g \circ f$.

c- En déduire la forme réduite de g .

4) Soit h l'antidéplacement qui envoie B sur E et C sur B .

a- Déterminer $h(J)$ et $(h \circ h)(C)$.

b- Montrer que h est une symétrie glissante et en déterminer la forme réduite.

Projet de correction du devoir de synthèse de mathématiques n°1

Niveau: 4ème année maths

Réalisée par : Mr.Smairy.J

Exercice 1: (3 points)

- 1) La fonction f admet une branche infinie de direction celle de l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$ donc la limite en $-\infty$ de la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ est infinie. Par ailleurs, lorsque x est au voisinage de $-\infty$, $f(x) > 0$ et ainsi $\frac{f(x)}{x} < 0$ ce qui donne $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$.
- 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - x \sin(\frac{1}{x})) = 1$; $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(2 - x \sin(\frac{1}{x})) = 0$.
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{-1 + \sqrt{1+x^2}} = 2$; $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(\frac{x^2}{-1 + \sqrt{1+x^2}}) = 0$.
- 4) $f \circ f(x)$ existe si et seulement si, $x \neq 0$ et $f(x) \neq 0 \Rightarrow f \circ f$ est définie sur $\mathbb{R}^* \setminus \{-1; 1; 2\}$.
- 5) $0 < x < 1 \Rightarrow 0 < f(x) < 2$; $-1 \notin f(]0, 2[) \Rightarrow -1$ n'admet pas un antécédent par $f \circ f$ dans $]0, 1[$, ainsi l'équation $f \circ f(x) = -1$ n'admet pas de solution dans $]0, 1[$.
- 6) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f \circ f(x) = +\infty$. D'autre part, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ et ainsi $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f \circ f(x)}{x} = -\infty$.

Bilan:

questions	1	2	3	4	5	6
réponses	b	a	a	c	a	b

Exercice 2: (4 points)

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}, U_n = S_{2n}, V_n = S_{2n+1}; n \in \mathbb{N}^*$$

- 1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a: $U_n - V_n = S_{2n} - S_{2n+1}$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\
 &= \frac{(-1)^{2n+1-1}}{2n+1} - \\
 &= -\frac{1}{2n+1}; \text{ d'où } U_n - V_n \leq 0 \text{ et ainsi :}
 \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a: $U_n \leq V_n$

- 2) a- $V_{n+1} - V_n = S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1}$

$$\begin{aligned}
 &= S_{2n+3} - S_{2n+1} \\
 &= \sum_{k=1}^{2n+3} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\
 &= \frac{(-1)^{2n+3-1}}{2n+3} + \frac{(-1)^{2n+2-1}}{2n+2} \\
 &= \frac{1}{2n+3} + \frac{-1}{2n+2} \\
 &= \frac{-1}{(2n+2)(2n+3)}; \text{ d'où } V_{n+1} - V_n \leq 0 \text{ et ainsi :}
 \end{aligned}$$

la suite (V_n) est décroissante.

b- On sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n \leq V_n$ donc $V_n \geq U_1$ avec $U_1 = \frac{1}{2}$. Il en résulte que la suite (V_n) est minorée et comme elle est décroissante alors, elle converge vers un réel α . Par ailleurs, puisque (V_n) est décroissante, alors pour

tout $n \in \mathbb{N}^*$, $V_n \leq V_1$ avec $V_1 = \frac{5}{6}$ et par passage à la limite on aura $\alpha \leq \frac{5}{6}$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \alpha; \frac{1}{2} \leq \alpha \leq \frac{5}{6}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad U_{n+1} - U_n &= S_{2(n+1)} - S_{2n} \\
 &= S_{2n+2} - S_{2n} \\
 &= \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\
 &= \frac{(-1)^{2n+2-1}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+1-1}}{2n+1} \\
 &= \frac{-1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} \\
 &= \frac{1}{(2n+2)(2n+1)}; \text{ d'où } U_{n+1} - U_n \geq 0 \text{ et ainsi : } \boxed{\text{la suite } (U_n) \text{ est croissante.}}
 \end{aligned}$$

$$4) \text{ Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a : } U_n - V_n = -\frac{1}{2n+1}; \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2n+1} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n - V_n) = 0.$$

Les suites (U_n) et (V_n) vérifient les conditions suivantes :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $U_n \leq V_n$
- La suite (U_n) est croissante et la suite (V_n) est décroissante.
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n - V_n) = 0$.

Il s'en suit que (U_n) et (V_n) sont adjacentes et ainsi elles convergent vers la même limite ce qui donne : $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \frac{\alpha}{\alpha}$.

$$5) \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \alpha \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n} = \alpha$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \alpha \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n+1} = \alpha$$

Comme les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent vers le même réel α alors (S_n) est convergente et on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{\alpha}{\alpha}$.

$$6) \text{ a- } \left. \begin{array}{l} (U_n) \text{ est croissante} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \alpha \Rightarrow \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, U_n \leq \alpha \\ (V_n) \text{ est décroissante} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \alpha \Rightarrow \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \alpha \leq V_n \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ on a : } U_n \leq \alpha \leq V_n}$$

$$\text{b- } \frac{1}{2n+1} \leq 0,02 \Rightarrow 2n+1 \geq 50 \Rightarrow n \geq 24,5 \text{ ainsi } \underline{25} \text{ est le plus petit entier naturel } n \text{ tel que } \frac{1}{2n+1} \leq 0,02.$$

$$\text{c- Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a : } U_n \leq \alpha \leq V_n \text{ donc } 0 \leq \alpha - U_n \leq V_n - U_n \text{ et ainsi } 0 \leq \alpha - U_n \leq \frac{1}{2n+1}$$

Un encadrement de α à 0,02 près est alors établi dès que $n = 25$. Dans ce cas $U_{25} \leq \alpha \leq V_{25}$ ce qui est équivalent à

$$S_{50} \leq \alpha \leq S_{51}. \text{ Par ailleurs, } S_{51} \approx 0,702 \text{ donc } S_{50} \approx 0,682. \text{ (en effet } S_{51} = S_{50} + \frac{1}{51} \approx S_{50} + 0,02).$$

$$\text{Il en résulte que } \boxed{0,682 \leq \alpha \leq 0,702}$$

Remarque : la valeur exacte de α est $\ln 2$ où \ln est la fonction logarithme népérien. ($\ln 2 \approx 0,69$ à 0,01 près).

Exercice 3: (4 points)

A- Exploitation du graphique :

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 1$. (C_g admet au voisinage de $+$ une asymptote oblique de coefficient directeur **1** dans le sens des $g(x)$ positifs).

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} \times \frac{x}{x-1} = 1 \times 1 = 1 ; \lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x) - g(-1)}{x+1} - 1 = g'(-1) - 1 = -1.$$

2) Tableau de variation de g sur $]-2, +\infty[$:

x	-2	-1	+
$g'(x)$		○	
g	↘	↗	

B- Etude d'une fonction auxiliaire : $f(x) = g(x) - x + 2 ; x \in]-2, +\infty[$.

1) $f(x) - g(x) = -x + 2$

- Si $-2 < x < 2$ alors $f(x) - g(x) > 0$ ce qui prouve que C_f est au dessus de C_g .
- C_f et C_g se coupent au point d'abscisse 2.
- Si $x > 2$ alors $f(x) - g(x) < 0$ ce qui prouve que C_f est au dessous de C_g .

2) a- Une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse -1 s'écrit : $y = f'(-1)(x + 1) + f(-1)$.

or $f'(-1) = g'(-1) - 1 = -1$ et $f(-1) = 2$ d'où : $T : y = -x + 1$.

b- On a $f(x) + x - 1 = g(x) + 1$ et puisque $g(x) \geq x - 1$ pour tout réel x de $]-2, +\infty[$ alors $f(x) + x - 1 \geq 0$ ce qui prouve que C_f est au dessus de T .

3) Comme C_g admet, au voisinage de $+\infty$, une asymptote d'équation $y = x - 1$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - x + 1) = 0$ et par suite $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - x + 2) = 1$ d'où : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ et ainsi la droite d'équation $y = 1$ est une asymptote à C_f au voisinage de $+\infty$.

4) Pour tout réel x de $]-2, +\infty[$, $g(x) \geq x - 1$ (C_g est au dessus de la droite d'équation $y = x - 1$). Il en résulte que, pour tout réel x de $]-2, +\infty[$, $g(x) - x + 1 \geq 0$ d'où $f(x) \geq 1$ ce qui affirme que l'équation $f(x) = 0$ n'admet aucune solution dans $]-2, +\infty[$.

Exercice 4: (4 points)

A- (E) : $z^3 - (3 + 3i)z^2 + (1 + 6i)z + 1 - 3i = 0 ; z \in \mathbb{C}$.

1) On pose $z_0 = x ; x \in \mathbb{R}$. z_0 est une solution de (E) $x^3 - (3 + 3i)x^2 + (1 + 6i)x + 1 - 3i = 0$.

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + x + 1 - 3i(x^2 - 2x + 1) = 0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 0 & (1) \\ x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

L'équation (1) admet une racine double qui est 1. Cette racine vérifie l'équation (2). Il en résulte que le réel 1 est l'unique solution du système précédent et ainsi $z_0 = 1$ est l'unique solution réelle de l'équation (E).

2) a- $(z - 1)(z^2 + az + b) = z^3 + (a - 1)z^2 + (b - a)z - b$.

Par identification membre à membre, on obtient le système suivant : $\begin{cases} a - 1 = -3 - 3i \\ b - a = 1 + 6i \\ -b = 1 - 3i \end{cases}$ d'où $\begin{cases} a = -2 - 3i \\ b = -1 + 3i \end{cases}$

b- (E) $(z - 1)(z^2 - (2 + 3i)z - 1 + 3i) = 0$ $z = 1$ ou $z^2 - (2 + 3i)z - 1 + 3i = 0$.

➤ Résolution, dans \mathbb{C} , de l'équation (E') $z^2 - (2 + 3i)z - 1 + 3i = 0$.

$$\Delta = (2 + 3i)^2 - 4(-1 + 3i) = 4 + 12i - 9 + 4 - 12i = -1 = i^2$$

Les solutions, dans \mathbb{C} , de l'équation (E') sont ainsi : $z = \frac{2+3i-i}{2} = 1 + 2i$.

➤ (E) $z = 1$ ou $z^2 - (2+3i)z - 1+3i = 0$; $z = 1$ ou $z = 1+i$ ou $z = 1+2i$.

$$S_{\mathbb{C}} = \left\{ 1 ; 1 + \frac{3-i}{2} + 2 \frac{3-i}{2} \right\}$$

B- f: P → P

$$M(z) \mapsto M'(z') ; z' = i\bar{z} + 1 + i.$$

1) a- Soit M(z₁) et N(z₂) deux points distincts d'images respectives M' et N' par f.

$$z'_2 - z'_1 = i\bar{z}_2 + 1 + i - i\bar{z}_1 - 1 - i = i(\bar{z}_2 - \bar{z}_1).$$

b- $M'N' = |z'_2 - z'_1| = |i(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)| = |i| \times |\bar{z}_2 - \bar{z}_1| = |z_2 - z_1| = MN$

Comme f conserve les distances, elle est bien une isométrie du plan.

2) Soit M(z) un point du plan.

On pose $z = x + iy$; $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} M \text{ est invariant par } f &\Leftrightarrow z = i\bar{z} + 1 + i \\ &\Leftrightarrow x + iy = i(x - iy) + 1 + i \\ &\Leftrightarrow x + iy = ix + y + 1 + i \\ &\Leftrightarrow x - y - 1 - i(x - y + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Le système précédent n'admet pas de solution et ainsi f n'admet pas de points invariants.

3) Soit les points A, B, C et D d'affixes respectives 1, -1, 1+2i et 1+i.

a- Si $z = 1$ alors $z' = i + 1 + i = 1 + 2i$ d'où $f(A) = C$.

Si $z = -1$ alors $z' = -i + 1 + i = 1$ d'où $f(B) = A$.

b- f est une isométrie sans points fixes donc elle est soit une translation de vecteur non nul, soit une symétrie glissante.

On a $\vec{AC} \neq \vec{BA}$ car $Z_C - Z_A = 2i$ et $Z_B - Z_A = 2$ donc f n'est pas une translation et ainsi elle est une symétrie glissante d'où $f = t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta}$ où \vec{u} est un vecteur directeur de Δ .

$$\begin{cases} f(A) = C \\ f(B) = A \end{cases} \Rightarrow f \circ f(B) = C \text{ or } f \circ f = t_{2i\vec{u}} \text{ d'où } 2i\vec{u} = \vec{BC} \text{ et ainsi } i\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{BC} = \vec{OD}$$

D'autre part O et D sont les milieux respectifs des segments [AB] et [AC] ce qui prouve que $\vec{OD} = \frac{1}{2}\vec{BC}$.

Conclusion : $f = t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta}$

Exercice 5: (5 points)

1) a- Comme ABCD est un carré alors $AB = CD$ et $AB \perp CD$ et par conséquent il existe un unique déplacement f tel que $f(A) = C$ et $f(B) = D$.

b- f est un déplacement donc il est soit l'identité, soit une translation de vecteur non nul, soit une rotation d'angle non nul

➤ $\vec{AC} \neq \vec{BD}$ donc f n'est pas une translation.

➤ $f(A) = C$ et $A \neq C$ donc f est différent de l'identité.

$$\Rightarrow f \text{ est une rotation d'angle } \alpha \text{ non nul. } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) [2\pi] \Rightarrow [2\alpha]$$

$$\Rightarrow f \text{ est une symétrie centrale et comme } f(A) = C \text{ et } O \text{ est le milieu de } [AC] \text{ alors } f(O) = O \Rightarrow f = S_O$$

Autre méthode : $\begin{cases} f(A) = C \\ f(B) = D \end{cases} \Rightarrow f$ est un déplacement d'angle α et comme $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \equiv \pi [2\pi]$ alors f est une

rotation d'angle π . Par ailleurs, $\text{med}[AC] = \text{med}[BD] = \{O\}$ d'où : $f = S_O$