DEVOIR DE SYNTHÈSE # 1.

4 MATH$_2$ – ANNÉE SCOLAIRE 2011–2012

Pr : Ben fredj sofiane

Le devoir dure 3 heures. Les calculatrices sont autorisées, mais :
l'échange de tout matériel est interdit
Les brouillons ne sont pas acceptés dans les copies. Une copie non soignée sera sanctionnée.
Le sujet comporte 3 pages numérotées de 1 à 3.

EXERCICE 1 (3 points). Répondre par VRAI ou FAUX (Aucune justification n'est demandée).

1– Si $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$ alors $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

2– Si f est continue en 1 alors f est dérivable en 1.

3– Si f est paire et si f est dérivable à droite en 0, alors elle est dérivable en 0.

4– ABC est un triangle rectangle en A. La transformation $t_{\overrightarrow{AB}}\circ S_{(AC)}$ est une symétrie glissante.

EXERCICE 2 (5 points). ABC est un triangle équilatéral de centre O.

1– Montrer qu'il existe une unique isométrie φ qui envoie A, B et C respectivement en B, C et A

2– a– Montrer que $\varphi(O)=O$.

b– Déterminer les images de C, O et A par $S_{BO}\circ\varphi$. Identifier l'application $S_{BO}\circ\varphi$.

c– Déduire la nature et les éléments caractéristiques de φ.

3– M et M' sont deux points variables respectivement sur les segments $[AB]$ et $[BC]$ tels que $AM=BM'$.
Montrer que la médiatrice du segment $[MM']$ passe par un point fixe que l'on précisera.

4– Déterminer l'isométrie ψ telle que l'application $\varphi\circ\psi$ envoie B en B, A en C et C en A.

EXERCICE 3 (6 points). .

1– Pour tous réels x et a de $[0,\frac{\pi}{2}]$ tel que $a>0$, on pose :

$$g(x)=\sin x - x - x^3\left(\frac{\sin a - a}{a^3}\right)$$

(a) Montrer qu'il existe $c\in]0,a[$ tel que $g'(c)=0$.

(b) On pose $\theta=\dfrac{c}{a}$. Montrer que $a-\sin a=\dfrac{a^3}{3}\times\dfrac{1-\cos(a\theta)}{(a\theta)^2}$.

(c) Déduire les résultats suivants :

(1) Pour tout $a \in]0, \frac{\pi}{2}]$, $\quad \sin a < a$.

(2) $\lim\limits_{a \to 0^+} \frac{a - \sin a}{a^3} = \frac{1}{6}$.

2– On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x} \text{ si } x \in]0, \frac{\pi}{2}[\text{ et } f(0) = 0.$$

(a) Montrer que pour tout réel $x \in]0, \frac{\pi}{2}]$, on a :

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x}{\sin x} \times \left(\frac{\sin x - x}{x^3} + \frac{1 - \cos x}{x^2} \right).$$

(b) Déduire que f est dérivable à droite en 0.

(c) Montrer que pour tout réel $x \in]0, \frac{\pi}{2}]$, $\quad f'(x) = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}$

(d) Étudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.

EXERCICE 4 (**6 points**). . Pour tout réel $X \in \mathbb{R}$, on pose $P(X) = X^3 + X$. On donne dans la **figure 1** (voir feuille annexe) la courbe Γ représentative de la fonction P.

1– (a) Montrer que P est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, l'équation $P(X) = n$ possède une solution unique α_n dans l'intervalle $]0, \sqrt{n}[$.

(c) Placer sur l'axe des abscisses les solutions α_1 , et α_3.

(d) A l'aide du graphique donner un encadrement d'amplitude 10^{-1} de α_3.

2– n étant un entier strictement positif.

(a) Vérifier que : $P(\alpha_{n+1}) = P(\alpha_n) + 1$

(b) Déduire que la suite (α_n) est croissante.

3– Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\left(\alpha_n\right)^2 \geq \sqrt{n} - 1$ puis déduire la limite de α_n lorsque n tend vers $+\infty$.

4– (a) Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a : $\frac{1}{P'(\alpha_{n+1})} \leq \alpha_{n+1} - \alpha_n \leq \frac{1}{P'(\alpha_n)}$.

(b) Pour tout $n \geq 2$, on note B_n le point de Γ d'abscisse α_n et soit H_n le projeté orthogonal de B_n sur l'axe des abscisses. On note β_n l'aire du triangle OH_nB_n.

Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} = 1$

Feuille annex (1) à rendre

Nom :...............................

Prénom : ....

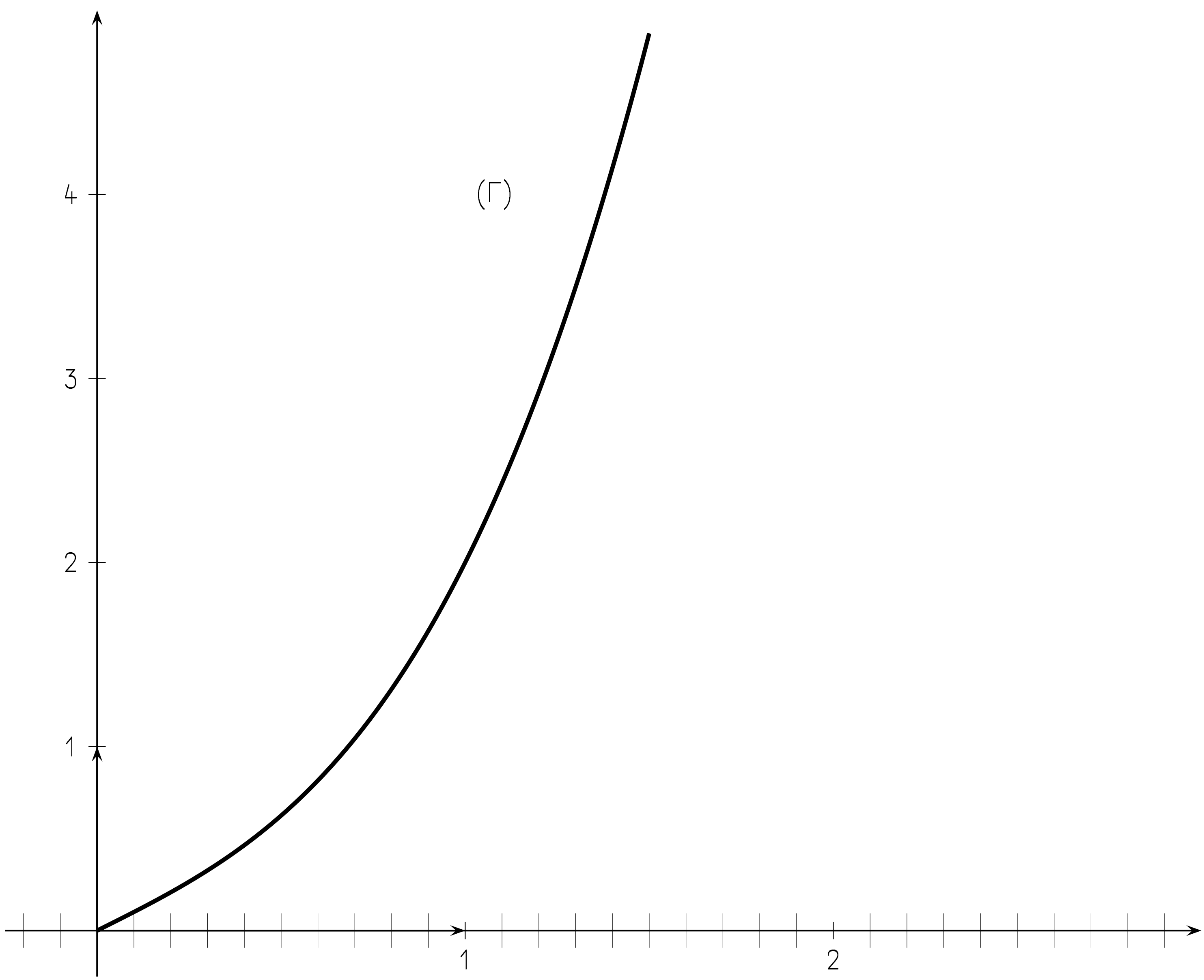

Figure 1