

Lycée de Mornag	DEVOIR DE SYNTHÈSE N°1	Le :06/12/2011
Mr :Oueslati Mongi		4 ^{ème} Math Durée : 3 H

Exercice n°1 (3 points)

1) Soit f une fonction dérivable sur $]0; +\infty[$; $f(1)=1$; $f'(1)=-3$; g une fonction définie sur $]0;2[$ tel que : $g(x)=\sqrt{f(x)}+x$; $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)-g(1)}{x-1}$ est égale à

- a) $-\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $-\frac{3}{2}$ d) $\frac{3}{2}$

2) Soit ABCD un carré de centre O tel que $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$; $S_c(B)=E$; $f=R_{(D; \frac{\pi}{2})} \circ S_{(CD)}$

alors f est égale à :

- a) $S_{(DE)}$ b) $S_{(AC)}$ c) $t_{\overrightarrow{CE}}$

3) Soit ABCD un carré de centre O tel que : $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$; $I = A * B$; $t_{\overrightarrow{BD}} \circ S_{(BC)} =$

- a) $t_{\overrightarrow{CD}} \circ S_{(OI)}$ b) $t_{\overrightarrow{BC}} \circ S_{(OI)}$ c) $S_{(BC)}$

Exercice n°2 (8 points)

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{x}{1 + \sqrt{1+x^2}}$

1)a) Montrer que pour tout réel x on a $f'(x) = \frac{1}{(1 + \sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}}$

b) Montrer que f réalise une bijection de \mathbb{R} sur J que l'on précisera . Soit f^{-1} la réciproque de f

2) a) Dresser le tableau des variations de f et préciser les branches infinies

b) Ecrire l'équation de la tangente T à la courbe représentative C_f au point d'abscisse 0

puis vérifier que si $x \geq 0$ on a $f(x) \leq \frac{1}{2}x$

et si $x \leq 0$, on a $f(x) \geq \frac{1}{2}x$

3) Construire les courbes représentatives C_f et $C_{f^{-1}}$, dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

4) Montrer que $f^{-1}(x) = \frac{2x}{1-x^2}$ pour x de J

5) Soit u_n une suite définie par : $u_0=1$ et $u_{n+1}=f(u_n)$

- a) Montrer que $u_n \in [0;1]$ pour tout entier naturel n
- b) Montrer que u_n est décroissante ; puis u_n est convergente et déterminer sa limite
- c) Montrer que $u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$ pour tout n de \mathbb{N} puis déduire que $u_n \leq \frac{1}{2^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 Retrouver la limite de u_n
- 6) Soit v_n une suite définie sur \mathbb{N}^* par : $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{n^2} f\left(\frac{1}{k}\right)$. Montrer que $f\left(\frac{1}{n^2}\right) \leq v_n \leq f\left(\frac{1}{n}\right)$ puis déduire la limite de v_n

Exercice n°3 (4 points)

Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$ et l'équation $(E_\alpha) : (\alpha-i)z^2 - [2(\alpha-i)+i\alpha]z + 2i\alpha = 0$

- 1) a) Trouver les solutions de (E_0) pour $\alpha=0$
 b) En déduire que pour tout α de $\mathbb{C} \setminus \{i\}$; (E_α) possède une solution réelle (On pourra inspirer une idée de 1)a))

c) Montrer que l'autre solution de (E_α) est $z_\alpha = \frac{i\alpha}{\alpha-i}$

- 2) Pour $\alpha = e^{i\theta}$ avec $\theta \in]0; \frac{\pi}{2}[$

a) Montrer que $z_\alpha = \frac{1}{2 \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \frac{3\pi}{4}\right)}$

b) Déterminer θ tel que OAB triangle isocèle en O . avec A et B d'affixes respectives z_α et i

Exercice n°4 (5 points)

Soit ABC un triangle rectangle et isocèle en A tel que : $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ et

$O = B * C ; I = A * C$ et $J = A * B$

- 1) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que $f(A)=O$ et $f(O)=C$
 b) Déterminer l'angle de f
 c) Déterminer $f \circ f(A)$ déduire que I est le centre de f

2) Soient $R_1 = r_{(O; \frac{\pi}{2})}$ et $R_2 = r_{(A; \frac{\pi}{2})}$ deux rotations

- a) Montrer que $R_2 = S_{(OA)} \circ S_{(AB)}$ et que $R_1(A)=B$
 b) Déterminer Δ tel que $R_1 = S_\Delta \circ S_{(OA)}$
 c) Déterminer $R_1 \circ R_2$

3) On considère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ un repère orthonormé direct du plan complexe

Soit $f: M(z) \rightarrow M'(z')$ tel que $z' = \bar{z} - i$

a) Montrer que f est la composée du translation T et d'une symétrie orthogonale S

tel que $T: M(z)$ associe $M'(z')$ avec $z' = z + i$

et $D: M(z)$ associe $M'(z')$ avec $z' = \bar{z}$

b) Montrer que f est une symétrie orthogonale dont on précisera l'axe

