

**Exercice 1** :(3 pts)

Donner la réponse correcte. Aucune justification n'est demandée.

1) Soit  $f$  une fonction continue sur  $[0,1]$  et dérivable sur  $]0,1[$ .

Si on suppose que  $f(0) = 0$  et  $f(1) = 1$ . Alors :

a) La fonction  $g$  définie sur  $[0, 1]$  par  $g(x) = f(x) - x$  admet un extremum local sur  $]0, 1[$

b) La fonction  $f$  est croissante sur  $[0,1]$ .

c) Il existe un réel  $c$  de  $]0,1[$  tel que  $f'(c)=0$ .

2) Soit  $g$  une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$  telle que  $g(1) = -\frac{1}{4}$  et  $g'(1) = \frac{1}{4}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan(\pi g(x)) + 1}{x-1} = : \quad \text{a) } \pi \quad ; \quad \text{b) } 0 \quad ; \quad \text{c) } \frac{\pi}{2}$$

3) Soit  $n$  un entier naturel. Le nombre  $(1 + i\sqrt{3})^n$  est un réel strictement positif si et seulement si,  $n$  s'écrit sous la forme de  $3k$  (où  $k$  est un entier naturel)

a)  $3k$  ; b)  $6k$  ; c)  $12k$

**Exercice 2** :(6,5 pts)

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$

On désigne par  $\Gamma$  sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère Orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1) a) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f$

b) Vérifier que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  ;  $f'(x) = \frac{4}{(\sqrt{x^2+4})^3}$  et Dresser le le tableau de variation de  $f$ .

c) Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  ;  $f'(x) \leq \frac{1}{2}$

d) Montrer que l'équation  $f(x) = x$  admet dans  $\mathbb{R}$  une seule solution  $\alpha$  et que  $\alpha \in ]1,6 ; 1,7[$ . En déduire que pour tout  $x \leq \alpha$ ,  $f(x) \geq x$ .

2) Tracer  $\Gamma$ .

3) Soit  $(U_n)$  la suite définie par  $U_0=1$  et pour tout  $n \geq 0$ ,  $U_{n+1}=f(U_n)$ .

a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ :  $0 \leq U_n \leq \alpha$ .

b) Montrer que la suite  $(U_n)$  est monotone et en déduire qu'elle est convergente et préciser sa limite.

c) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha|$ .

d) En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ . Retrouver alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

### Exercice 3: ( 4,5 points)

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct, on considère le point A d'affixe 2 et  $\mathcal{C}$  le cercle de centre O passant par A. On pose  $\alpha = 1 + i\sqrt{3}$ .

1) a) Démontrer que  $\alpha^2 - 4\alpha = 2\bar{\alpha} - 8$ .

b) Démontrer que les points B et C d'affixes respectives  $\alpha$  et  $\bar{\alpha}$  appartiennent au cercle  $\mathcal{C}$ . Construire  $\mathcal{C}$  et placer les points A, B et C.

2) Soit D un point du cercle  $\mathcal{C}$  d'affixe  $2e^{i\theta}$  où  $\theta$  est un réel de l'intervalle  $]-\pi, \pi]$ . et E l'image de D par la rotation de centre O et d'angle  $\frac{\pi}{3}$ .

Justifier que le point E a pour affixe  $Z_E = \alpha e^{i\theta}$  et placer les points D et E.

3) Soient F et G les milieux respectifs des segments [BD] et [CE].

a) Justifier que les affixes des points F et G sont respectivement

$$Z_F = \frac{\alpha}{2} + e^{i\theta} \text{ et } Z_G = \frac{\alpha e^{i\theta} + \bar{\alpha}}{2}.$$

b) Démontrer que  $\frac{Z_G - 2}{Z_F - 2} = \frac{\alpha}{2}$ . (On pourra utiliser la question 1) a)).

En déduire que le triangle AFG est équilatéral.

### Exercice 4 : (6 pts)

Soit AFED un carré de côté 4 cm tel que  $(\widehat{AF, AD}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$  et soit O son centre. On désigne par B et I les symétriques respectifs de A et O par rapport à (EF).

1) a) Soit R la rotation définie par  $R(F) = E$  et  $R(E) = D$ . Préciser l'angle et le centre de R.

b) Soit  $f = R \circ S_{(OI)}$  où  $S_{(OI)}$  est la symétrie orthogonale d'axe (OI).

Montrer que  $f = S_{(OE)}$

2) Soit  $R' = t_{\vec{OI}} \circ R^{-1}$  où  $t_{\vec{OI}}$  désigne la translation de vecteur  $\vec{OI}$  et  $R^{-1}$  désigne la réciproque de R.

a) Déterminer les images de O, F et E par  $R'$ .

b) Déduire que  $R'$  est une rotation dont on précisera le centre et l'angle.

3) On pose  $\Delta$  la médiatrice du segment [AF] et soit  $g = S_{(AD)} \circ S_{\Delta} \circ S_{(OI)}$ .

a) Montrer que g est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur.

b) Soit M un point du plan.

Montrer que  $g(M) = R'(M)$  si et seulement si  $f(M) = M$

c) On déduit l'ensemble des points M tel que  $g(M) = R'(M)$ .

**Bon Travail**

