7C	DEVOIR DE MATHS	DUREE 4H	03/02/2011

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (5 POINTS)

On considère un quadrilatère de sens direct ABCD. On construit quatre carrés à l'extérieur de ce quadrilatère ayant pour base les côtés de celui-ci. Soit M,N, P,Q les centres des carrés de base respective [AB], [BC], [CD], [DA]. Soit U et S les milieux de [BD] et [AC] et O l'isobarycentre de A,B,C,D.

1) Construire la configuration précédente.

2)Dans le plan complexe, soit a,b,c,d,w,m,n,p,q les affixes respectives des points A,B,C,D,O,M,N,P,Q.

a) Montrer que $m=\dfrac{a-ib}{1-i}$. Donner des écritures analogues pour les nombres n,p et q.

b) Montrer que (MP) et (NQ) sont perpendiculaires et que MP = NQ.

3) On pose T et V milieux respectifs de [MP] et [NQ].

a) Montrer que si U = S, alors MNPQ est un carré.

b) Si U est distinct de S, déterminer l'isobarycentre de M,N, P,Q, en déduire le milieu de [TV].

4) Soit r le quart de tour direct de centre O. Montrer que r(S) = T. Conclure sur la nature du quadrilatère STUV .

EXERCICE 2 (5 POINTS)

1) Montrer que pour tout x de $]0,1[$, on a : $\ln(1+x)<x<-\ln(1-x)$.

2) Montrer que pour tout $n\in IN^*$: $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<1$, et $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}>1$.

3) En déduire que pour tout $n\in IN^*$: $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$.

4) Vérifier que pour tout $n\in IN^*$: $1<\dfrac{e}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}<1+\dfrac{1}{n}$.

5) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

EXERCICE 3 (5 POINTS)

Pour tout entier naturel n on considère la fonction f_n définie par:

$f_0(x)=\dfrac{1}{1+x+x^2}$; et pour tout entier $n>0$: $f_n(x)=\dfrac{x^n}{1+x+x^2}$.

On pose $U_n = \int_0^1 f_n(x)dx$.

1.a) Montrer que pour tout entier naturel supérieur à 0, les courbes C_n passent par deux points fixes que l'on déterminera.

b) Etudier la position relative des courbes C_n et C_{n+1} pour $n > 0$.

2.a) Justifier l'existence de U_n sans le calculer.

b) Montrer que la suite $(U_n)_{n\in IN}$ est décroissante et interpréter graphiquement.

c) Montrer que pour tout $n > 0$: $\frac{1}{3(n+1)} \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$. En déduire $\lim_{n\to+\infty} U_n$.

3) Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que:

Pour tout $n > 0$, $U_n = \frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}\varphi(x)dx$ où: $\varphi(x) = \frac{1+2x}{(1+x+x^2)^2}$.

4.a) En utilisant les variations de la fonction φ sur l'intervalle [0,1], montrer que pour tout entier naturel n: $1+\frac{1}{n+2} \leq 3(n+1)U_n \leq 1+\frac{3}{n+2}$.

b) En déduire que: $\lim_{n\to+\infty} 3nU_n = 1$.

EXERCICE 4 (5 POINTS)

On considère la fonction numérique définie par : $f(x) = 2x-3+\ln\left(\frac{x^2-2x+2}{x^2}\right)$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1.a) Vérifier que l'ensemble de définition de f est IR^*.

b) Calculer $\lim_{x\to0} f(x)$, interpréter graphiquement;

c) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

d) Montrer que (C) admet deux asymptotes dont l'une notée D est oblique. Etudier la position relative de (C) et de D.

2.a) Calculer $f'(x)$ puis vérifier que $f'(x) = \frac{2(x-1)}{x}\varphi(x)$ où φ est une fonction strictement positive pour tout $x \neq 0$ à déterminer.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions distinctes α, β et γ dont on donnera un encadrement d'amplitude 5×10^{-1}.

d) Construire (C).

3. On se propose dans cette question de calculer l'aire S du domaine délimité par la courbe et les droites d'équations respectives : $y = 2x-3$, $x = 2$ et $x = 1+\sqrt{3}$.

a) Vérifier que pour tout réel x on a : $\frac{2x-4}{x^2-2x+2} = \frac{2x-2}{x^2-2x+2} - \frac{2}{1+(x-1)^2}$.

b) Calculer $A = \int_2^{1+\sqrt{3}} \frac{2x-2}{x^2-2x+2}dx$.

c) En posant $x = 1+\tan t$ pour tout $t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$; calculer $B = \int_2^{1+\sqrt{3}} \frac{2}{1+(x-1)^2}dx$.

d) Déduire de ce qui précède le calcul de l'aire S exprimée en unité d'aire.

Fin.