L.S.Avenue de la liberté *Jendouba*

07/12/2010--------------- $4^{\text{ème}}$ Math

DEVOIR DE SYNTHESE N°1

Mathématiques ------------- 3 heures

Prof : -------------Gharbi Chaouki --------------------

EXERCICE 1 : (3 points)

A) Pour chacune des questions suivantes, une et une seule des trois propositions est exacte.
L'élève indiquera la lettre correspondante à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

1) $(1+i)^{2010}$ appartient à :

a) $\mathbb{R}_+$ b) $\mathbb{R}_-$ c) $i\mathbb{R}$

2) l'application f du plan complexe dans lui-même qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que $z'=i\bar{z}+1$ est une :

a) Rotation b) symétrie glissante c) symétrie orthogonale

3) Le produit des racines nièmes de l'unité est égale à :

a) 1 b) $(-1)^n$ c) $(-1)^{n-1}$

B) Soit f une fonction impaire et deux fois dérivable sur [-5,5]dont les variations de sa fonction dérivée f' sur [0,5] est donné par le tableau ci-contre.

x	0		1		3		5
f'	-1	↘	-2	↗	0	↗	1

Répondre par vrai ou faux. Aucune justification n'est demandée.

1) $|f(5)|\le 10$
2) La courbe de f admet un seul point d'inflexion
3) Sachant que $f([-5,5])\subset[-5,5]$ alors $f\circ f$ est une fonction impaire, deux fois dérivable sur [-5,5] et $(fof)'(0)=1$

EXERCICE 3 : (4 points)

On donne : 2011 est un nombre premier

1) On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E): 2011x+112y=1$
   a) Trouver une solution particulière pour l'équation (E)
   b) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E)
   c) Quelle est l'inverse de 112 modulo 2011 ?
2) On désigne par F l'ensemble des entiers naturels compris entre 1 et 2010
   a) Vérifier que pour tout entier a de F, il existe un unique entier u de F tel que $au\equiv 1(\text{mod}\,2011)$
   b) Déterminer tous les entiers a de F tels que $a^2\equiv 1(\text{mod}\,2011)$
   c) Prouver que $2010!\equiv -1(\text{mod}\,2011)$

EXERCICE 3 : (5 points)

Dans le plan oriente dans le sens direct, on considère un carré direct OABC de centre Ω

On note I, J et K les milieux respectifs de [OA], [OC] et [AB]

1) Soit $f = S_{(OB)} \circ S_{(\Omega I)}$

   Caractériser f

2) Soit g une isométrie sans points fixes qui transforme O en C et I en J

   a) Déterminer g(A)

   b) Montrer que g est une symétrie glissante

   c) Soit $D = g(K)$. Montrer que O est le milieu de [ID]

   d) Vérifier que $g = t_{\overrightarrow{AO}} \circ S_{(AC)}$

   e) En déduire les éléments caractéristiques de g

3) Soit $\varphi = g^{-1} \circ f$

   a) Déterminer $\varphi(O)$ et $\varphi(I)$ puis caractériser φ

   b) Trouver alors l'ensemble (S) des points M du plan tels que f(M)=g(M)

EXERCICE 4 : (8points)

A) Le graphique ci-dessous (Voir la page 4) est la représentation graphique $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie sur $]1,2]$ dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. La droite d'équation $x=1$ est une asymptote à $\mathscr{C}$

1) Par une lecture graphique :

a) Montrer que f n'est pas dérivable à gauche en 2 et donner $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{f(x)}{x-2}$

b) Montrer que f réalise une bijection de $]1,2]$ sur un intervalle J que l'on précisera

c) Construire la courbe $\mathscr{C}'$ de f^{-1} dans le même repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ à la page 4

d) Montrer que f^{-1} est dérivable à droite en 0 et déterminer $\left(f^{-1}\right)'_d(0)$

2) On admet que $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x-x^2}}{x-1}$

a) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution α dans $]1,2]$. Vérifier que $\dfrac{3}{2} < \alpha < 2$

b) Montrer que pour tout $x \in [0,+\infty[$ on a: $f^{-1}(x) = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

3) Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f^{-1}(u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

a) Construire les quatre premiers termes se la suite (u_n) sur l'axe des abscisses du repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \le u_n \le 2$

c) Calculer $\left(f^{-1}\right)'(x)$ pour tout $x \in [0,+\infty[$ puis montrer que pour tout $x \in [1,2]$, $\left|\left(f^{-1}\right)'(x)\right| \le \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

d) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \le \dfrac{\sqrt{2}}{2}|u_n - \alpha|$

e) Montrer alors que (u_n) est convergente et donner sa limite

B) Soit g la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ par : $\begin{cases} g(x)=\dfrac{1}{f^{-1}(\tan(2x))} & \text{si } x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right[\\ g\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1 \end{cases}$

1) Montrer que pour tout $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, $g(x)=\dfrac{1}{1+\cos(2x)}$

2) a) Montrer que g réalise une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ sur $\left[\frac{1}{2},1\right]$

b) Etudier la dérivabilité de g^{-1} à droite en $\dfrac{1}{2}$

c) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $\left]\frac{1}{2},1\right]$ et que $\left(g^{-1}\right)'(x)=\dfrac{1}{2x\sqrt{2x-1}}$

☺**Bon Travail** ☺

"Ne t'inquiète pas si tu as des difficultés en maths, je peux t'assurer que les miennes sont bien plus importantes !"

"L'imagination est bien plus importante que la connaissance."

Albert EINSTEIN (1879 –1955)

Nom & prénom :……………………………………………..N° :…………… Classe : $4^{ème}$ Math

Feuille à rendre avec la copie :

EXERCICE 1 :

A			B		
1)	2)	3)	1)	2)	3)

EXERCICE 4 :