Prof : Mhamdi Abderrazek	Devoir de synthèse n°3	Niveau:3éme sc.exp
Lycée Thélepte	28 mai 2014	Durée:3heures

Exercice 1 : (4points)

Soit (U) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1} \ \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

1).a).Calculer $u_1 \, et \, u_2$.

b).Montrer que (U) n'est ni arithmétique ni géométrique.

2).a).Montrer que $u_n \geq 1 \forall n \in \mathbb{N}$.

b). Montrer que (U) est strictement croissante.

3).Soit (V) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n^2$.

a).Montrer (V) est une suite arithmétique de raison r =1.

b).Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c).Calculer $\lim_n v_n$ et $\lim_n u_n$.

Exercice 2 : (6points)

Une urne contient 5 boules rouges numérotées : 0.0.0.0.1 et 3 boules noires numérotées : 0.0.1.
1).On tire simultanément et au hasard 2 boules de l'urne .

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A:avoir 2 boules de même couleur.

B :avoir 2 boules qui portent le même numéro.

C **:**avoir 2 boules de même couleur et qui portent le même numéro.

D :avoir 2 boules de même couleur ou qui portent le même numéro.

2).On a tiré 2 boules rouges .Quelle est la probabilité qu'elles portent le même numéro.

3).Un jeu consiste à tirer une boule :

Si elle est noire on la remet dans l'urne et on tire une deuxième boule

Si elle est rouge on ne la remet pas dans l'urne et on tire une deuxième boule.

Calculer la probabilité de l'événement suivant : La deuxième boule tirée est noire.

Exercice 3 : (6points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Soient les points A(1 ;1 ;1) ;B(0 ;0 ;1) ;C(1;2;2) , D(3;3;3) et K(3;3;1).

1).a). Montrer que les points A ;B et C déterminent un seul plan (P).

b).Montrer qu'une équation cartésienne du plan (P) est :x-y+z -1=0.

c).Vérifier que les points A ;B ;Cet D ne sont pas coplanaires.

2).Soit Δ la droite perpendiculaire au plan (P) et passant par le point D.

a).Déterminer une représentation paramétrique de Δ.

b). Déterminer les coordonnées du point H le projeté orthogonal de D sur le plan (P).

c).En déduire la distance du point D au plan (P).

3).a).Montrer que le point K est le projeté orthogonal du point D sur la droite (AB).

b).En déduire la distance du point D à la droite (AB).

Exercice 4 :(4points)

Le tableau suivant donne l'évolution du profit annuel d'une entreprise de 2007 à l'année 2013.

Année	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6	7
Profit annuel en millions d'euros y_i	1,26	1,98	2,28	2,62	2,84	3,00	3,20

1).a).Calculer la moyenne $\overline{X}$ et l'écart-type σ_X de la variable X.

b). Calculer la moyenne $\overline{Y}$ et l'écart-type σ_Y de la variable Y.

2).a).Déterminer une équation de la droite d'ajustement affine de Y en X par la méthode de Mayer.

b). Déduire de cet ajustement une estimation du profit annuel de l'entreprise en 2016.

Exercice n°1 :

1).a). $u_1=\sqrt{u_0{}^2+1}=\sqrt{1^2+1}=\sqrt{2}$; $u_2=\sqrt{u_1{}^2+1}=\sqrt{\sqrt{2}^2+1}=\sqrt{2+1}=\sqrt{3}$.

b). On a $u_1-u_0\neq u_2-u_1$ donc (U) n'est pas une suite arithmétique.

On a $\frac{u_1}{u_0}\neq\frac{u_2}{u_1}$ donc (U) n'est pas une suite géométrique.

2).a).pour n=0 on a $u_0=1\geq 1$(vrai).

Supposons que $u_n\geq 1$ et montrons que $u_{n+1}\geq 1$

On a $u_n\geq 1$ alors $u_n{}^2\geq 1$ alors $u_n^2+1\geq 2$ alors $\sqrt{u_n{}^2+1}\geq\sqrt{2}\geq 1$ alors $u_{n+1}\geq 1$

Conclusion : $u_n\geq 1\ \forall n\in\mathbb{N}$

b).

$$u_{n+1}-u_n=\sqrt{u_n{}^2+1}-u_n=\frac{(\sqrt{u_n{}^2+1}-u_n)(\sqrt{u_n{}^2+1}+u_n)}{\sqrt{u_n{}^2+1}+u_n}=\frac{\sqrt{u_n{}^2+1}^2-u_n{}^2}{\sqrt{u_n{}^2+1}+u_n}=\frac{u_n{}^2+1-u_n{}^2}{\sqrt{u_n{}^2+1}+u_n}=\frac{1}{\sqrt{u_n{}^2+1}+u_n}\succ 0$$

$donc\, u_{n+1}\succ u_n\ \forall n\in\mathbb{N}$

donc (U) est strictement croissante.

3).a).On a $v_{n+1}=(u_{n+1})^2=\sqrt{u_n{}^2+1}^2=u_n{}^2+1=v_n+1$ donc (V) est une suite arithmétique

de raison r = 1 et de premier terme $v_0=u_0{}^2=1^2=1$.

b). $v_n=v_0+$ n.r = 1+n $\forall n\in\mathbb{N}$; on a $v_n=u_n{}^2$ donc $u_n=\sqrt{v_n}=\sqrt{n+1}$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

c). $\lim_n v_n=\lim_n u_n=+\infty$.

Exercice n°2 :

1).Card(Ω)= $C_8^2=28$.

Card(A)=$C_5^2+C_3^2=13$ alors p(A)=$\frac{card(A)}{card(\Omega)}=\frac{13}{28}$.

Card(B)= $C_6^2+C_2^2=16$ alors p(B)= $\dfrac{card(B)}{card(\Omega)}=\dfrac{16}{28}$.

Card(C)= $card(A\cap B)=C_4^2+C_2^2=7$ alors p(C)= $\dfrac{card(C)}{card(\Omega)}=\dfrac{7}{28}$.

p(D)= $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)=\dfrac{22}{28}$

2).p$_1$= $\dfrac{C_4^2}{C_5^2}=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$.

3).p$_2$= $\dfrac{3}{8}.\dfrac{3}{8}+\dfrac{5}{8}.\dfrac{3}{7}=\dfrac{183}{448}$.

<u>Exercice n°3 :</u>

1).a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix};\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$;on a $\begin{vmatrix}-1 & 0\\-1 & 1\end{vmatrix}$=-1 $\neq 0$ donc $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires donc les points A ;B et C ne sont pas alignés et par suite A ;B et C déterminent un seul plan (P).

b).M(x ;y ;z) $\in$ (P) $\Leftrightarrow$ dét $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ =0 $\Leftrightarrow$ $\begin{vmatrix}x-1 & -1 & 0\\y-1 & -1 & 1\\z-1 & 0 & 1\end{vmatrix}=0$

$\Leftrightarrow (x-1)\begin{vmatrix}-1 & 1\\0 & 1\end{vmatrix}-(y-1)\begin{vmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{vmatrix}+(z-1)\begin{vmatrix}-1 & 0\\-1 & 1\end{vmatrix}=0$

$\Leftrightarrow -(x-1)+(y-1)-(z-1)=0 \Leftrightarrow x-y+z-1=0 \Leftrightarrow (P): x-y+z-1=0$.

c).On a $x_D-y_D+z_D-1=3-3+3-1=2\neq 0 \Leftrightarrow D\notin(P)$ d'où A ;B ;C et D ne sont pas coplanaires.

2).a).On a $\Delta\perp(P)$ alors le vecteur $\vec{n}_P\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ normal à (P) est un vecteur directeur de Δ.

d'où $\Delta:\begin{cases}x=3+\alpha\\y=3-\alpha\\z=3+\alpha\end{cases}$;$\alpha\in\mathbb{R}$.

b).On a Δ passe par D et perpendiculaire à (P) donc H est le point d'intersection de Δ et (P) d'où :

$$\begin{cases} x_H = 3+\alpha \\ y_H = 3-\alpha \\ z_H = 3+\alpha \\ x_H - y_H + z_H - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = 3+\alpha \\ y_H = 3-\alpha \\ z_H = 3+\alpha \\ (3+\alpha)-(3-\alpha)+(3+\alpha)-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = 3+\alpha \\ y_H = 3-\alpha \\ z_H = 3+\alpha \\ \alpha = \frac{-2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = \frac{7}{3} \\ y_H = \frac{11}{3} \\ z_H = \frac{7}{3} \end{cases} \Leftrightarrow H(\frac{7}{3};\frac{11}{3};\frac{7}{3}).$$

c).d(D ;(P))=DH $= \sqrt{(x_H - x_D)^2 + (y_H - y_D)^2 + (z_H - z_D)^2} = \sqrt{(\frac{-2}{3})^2 + (\frac{2}{3})^2 + (\frac{-2}{3})^2} = \sqrt{\frac{12}{9}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$

3).a).On a $\overrightarrow{AK}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} donc\ \overrightarrow{AK} = -2\,\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AK}\ et\ \overrightarrow{AB}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow K \in (AB)$

et on a $\overrightarrow{AK} . \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AK} \perp \overrightarrow{AB}$ d'où K est le projeté orthogonal de D sur (AB).

b).d(D ;(AB))=DK= $\sqrt{0^2 + 0^2 + (-2)^2} = 2.$

<u>Exercice n°4 :</u>

1).a). $\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{7}$ =4 ; $\sigma_X = \sqrt{V(X)} = 2$ où $V(X) = \overline{X^2} - (\overline{X})^2$.

b). $\overline{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{7} = 2,45$; $\sigma_Y = \sqrt{V(Y)} \simeq 0,62$ où $V(Y) = \overline{Y^2} - (\overline{Y})^2$.

2).a).Soit (S_1) :

x_i	1	2	3	4
y_i	1,26	1,98	2,28	2,62

(S_2) :

x_i	5	6	7
y_i	2,84	3,00	3,20

On a $G_1(\overline{X_1};\overline{Y_1})\ donc\ G_1(2,5;2,035)$; $G_2(\overline{X_2};\overline{Y_2})\ donc\ G_2(6;3,013)$.

La droite de Mayer est la droite $(G_1G_2): y = ax + b$

donc $a = \frac{\overline{Y_2} - \overline{Y_1}}{\overline{X_2} - \overline{X_1}} \simeq 0,28\ et\ b = \overline{Y_1} - a\overline{X_1} \simeq 1,33$ d'où $(G_1G_2): y = 0.28x + 1,33.$

<u>en 2016</u> on aura x= 10 donc y =0,28x10+1,33=4,13

donc on estime qu'en 2016 le profit annuel sera 4,13 millions euros.

Bonnes vacances