LYCEE THELEPTE ✠✠✠ ***Devoir de synthèse n°2*** ✠✠✠ **Année scolaire : 2010-2011**	**Niveau : 3 ème Sc .Exp** ✠✠✠ *Epreuve : Mathématiques* Durée : **3** heures ✠✠✠ **Enseignant : H.Salem**

Exercice 1: (3 points)

Donner la réponse correcte.

1) Le nombre des anagrammes du mot MATHS est :
   a) 25 ; b) 120 ; c) 5^5
2) Le plan est muni d'un repère cartésien $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Soit $E = \{1, \sqrt{2}, \pi, 2, 0\}$.
   Le nombre de tous les points de coordonnées (a , b) où $a \in E$ et $b \in E$ est :
   a) A_5^2 ; b) 2^5 ; c) 5^2
3) Un sac contient cinq jetons numérotés de 0 à 4. On tire successivement et sans remise 3 jetons. Le nombre de tirage possible est :
   a) 60 ; b) 15 ; c) 125

Exercice 2 : (5 points)

Le tableau ci-dessous est le tableau de variation d'une fonction h.

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
h	1	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	1

1) a) Donner les ensembles de définition de h et de h'.
   b) Donner les limites de h aux bornes de son ensemble de définition.
   c) Donner les équations des asymptotes à la courbe représentative de h.
2) Discuter suivant les valeurs de k ($k \in IR$) le nombre des solutions de l'équation $h(x) = k$.
3) On pose $h(x) = \dfrac{ax^2+b}{x^2-2}$ (où a et b sont des réels). Soit Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormé .
   a) Calculer en fonction de a et b la dérivé h'(x) de h(x).
   b) En vous aidant de $\lim_{+\infty} h$ et h(0) déterminer les réels a et b.
   c) Tracer Γ .

WWW.DEVOIR@T.NET © 2014

Exercice 3 : (6 points)

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - 4$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonale.

1) Déterminer les réels α et β sachant que f admet un extremum local en -2 égale à 0.
   Dans la suite on prend $\alpha = 1$ et $\beta = 3$. $(f(x) = x^3 + 3x^2 - 4)$
2) Montrer que le point $I(-1, -2)$ est un centre de symétrie de C_f .
3) Etudier f.
4) a) Donner l'équation de la tangente T à C_f au point I.
   b) Etudier la position relative de T et C_f .
   c) Tracer T et C_f.
5) Soit $g(x) = |x|^3 + 3x^2 - 4$.
   a) Vérifier que g est paire.
   b) Déduire à partir de C_f une constriction de C_g dans le même repère.
   c) Dresser le tableau de variation de g.

Exercice 4: (6 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

On considère le nombre complexe Z tels que $|z| = 2$ et $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$

1) Soit $u = z^3$ et $v = 2Z$.
   Ecrire les nombres complexes u et v sous formes trigonométriques.
2) Soit $w = 2z - z^3$ et A, B et C les points d'affixes respectives u, v et w.
   a) Placer les points A, B dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
   b) Montrer que $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB}$ et en déduire la nature du quadrilatère OABC.
   c) Placer alors le point C dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$
3) Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe t tel que
   $|t| = |t - 1 - i\sqrt{3}|$.
4) Soit M_n le point d'affixe z^n où n est un entier naturel
   a) Ecrire sous forme trigonométrique l'affixe Z_n du point M_n.
   b) Pour quelles valeurs de n le point M_n appartient à la droite $(O, \vec{\imath})$.

Bon Travail

WWW.DEVOIR@T.NET © 2014

Correction

Exercice1 :

1) Le nombre des anagrammes du mot MATHS est $5! = 120$.
2) Le plan est muni d'un repère cartésien $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Soit $E = \{1, \sqrt{2}, \pi, 2, 0\}$.

   Le nombre de tous les points de coordonnées (a, b) où $a \in E$ et $b \in E$ est $5^2 = 25$.
3) Un sac contient cinq jetons numérotés de 0 à 4. On tire successivement et sans remise 3 jetons. Le nombre de tirage possible est $A_5^3 = 60$.

Exercice2 :

1) a) h est définie et dérivable sur $IR\backslash\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$.

   b) $\lim\limits_{-\infty} h = 1$; $\lim\limits_{+\infty} h = 1$; $\lim\limits_{(-\sqrt{2})^-} h = +\infty$; $\lim\limits_{(-\sqrt{2})^+} h = -\infty$; $\lim\limits_{\sqrt{2}^-} h = -\infty$

   et $\lim\limits_{\sqrt{2}^+} h = +\infty$.

   c) Les asymptotes à (C_h) sont les droites d'équations : $y = 1$, $x = -\sqrt{2}$ et $x = \sqrt{2}$.
2) On pose n le nombre de solution de l'équation $h(x) = k$.

k	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
n		2	0	0	1	2	

3) $h(x) = \dfrac{ax^2+b}{x^2-2}$.

   a) Pour tout $x \in IR\backslash\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$, $h'(x) = \dfrac{2ax(x^2-2)-2x(ax^2+b)}{(x^2-2)^2} = \dfrac{2ax^3-4ax-2ax^3-2bx}{(x^2-2)^2}$

   $= \dfrac{-2(2a+b)x}{(x^2-2)^2}$.

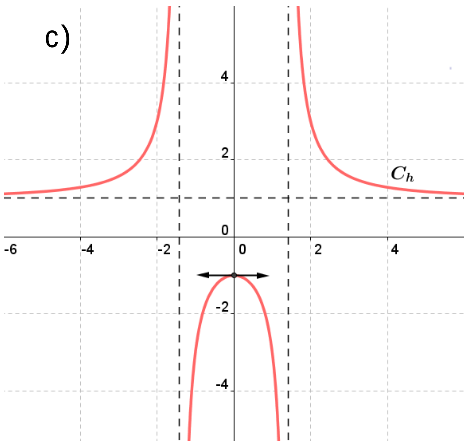
   b) $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 1 = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{ax^2+b}{x^2-2} = a$

   donc $a = 1$.

   $h(0) = -1 = -\frac{b}{2}$ donc $b = 2$.

   Ainsi $h(x) = \dfrac{x^2+2}{x^2-2}$.

   c)



WWW.DEVOIR@T.NET © 2014

Exercice 3 :

$f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - 4$

1) f admet un extremum local en -2 égale à 0 alors $\begin{cases} f'(-2) = 0 \\ f(-2) = 0 \end{cases}$.

   Or $f'(x) = 3\alpha x^2 + 2\beta x \Longrightarrow f'(-2) = 12\alpha - 4\beta$.

   On a donc $\begin{cases} 12\alpha - 4\beta = 0 \\ -8\alpha + 4\beta - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha - \beta = 0 \\ -2\alpha + \beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha - \beta = 0 \\ \alpha = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 3 \\ \alpha = 1 \end{cases}$

2) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$

   Montrons que $I(-1, -2)$ est un centre de symétrie de C_f.

   Pour tout $x \in$ IR, $-2 - x \in$ IR ; $f(-2-x) = (-2-x)^3 + 3(-2-x)^2 - 4$

   $= -(2+x)^3 + 3(2+x)^2 - 4 = -8 - 3 \times 2^2 x - 3 \times 2x^2 - x^3 + 3(4 + x^2 + 4x) - 4$

   $= -8 - 12x - 6x^2 - x^3 + 12 + 3x^2 + 12x - 4 = -x^3 - 3x^2$.

   $f(-2-x) + f(x) = -x^3 - 3x^2 + x^3 + 3x^2 - 4 = -4 = 2 \times (-2)$.

3) <u>Etude de f :</u>

   f est une fonction polynôme donc dérivable sur IR.

   $\forall x \in$ IR, $f'(x) = 3x^2 + 6x$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -2$.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
f'(x)		+	0	−	0	+	
f	$-\infty$	↗	0	↘	0	↗	$+\infty$

4) a) T : $y = f'(-1)(x+1) + f(-1) = -3(x+1) - 2 = -3x - 5$.

   b) $\forall x \in$ IR, $f(x) - (-3x - 5) = x^3 + 3x^2 - 4 + 3x + 5 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

   $= (x+1)^3$.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
Signe de $(x+1)^3$	−	0	+
Position de C_f et T	T/C_f		C_f/T

5) $g(x) = |x|^3 + 3x^2 - 4$.

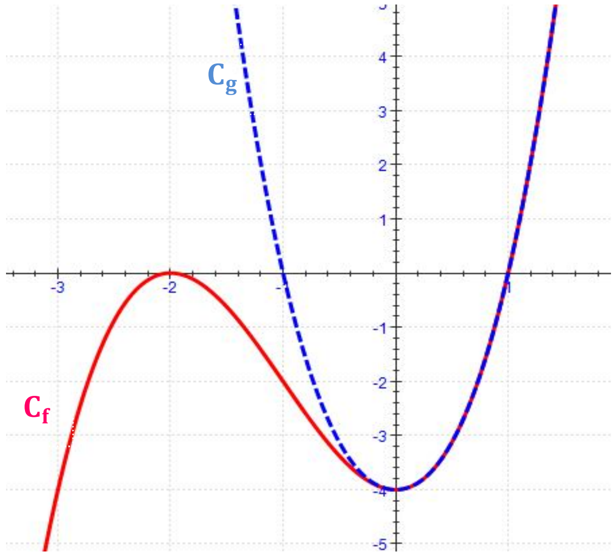
   a) $\forall x \in$ IR, $-x \in$ IR et $g(-x) = |-x|^3 + 3(-x)^2 - 4 = |x|^3 + 3x^2 - 4 = g(x)$.

   b) Si $x \geq 0$, $g(x) = x^3 + 3x^2 - 4 = f(x)$ donc C_g et C_f sont confondues pour tout $x \geq 0$.

   La restriction de g à $]-\infty, 0]$ est le symétrique de C_f par rapport à l'axe $(O, \vec{j})$.

WWW.DEVOIR@T.NET © 2014

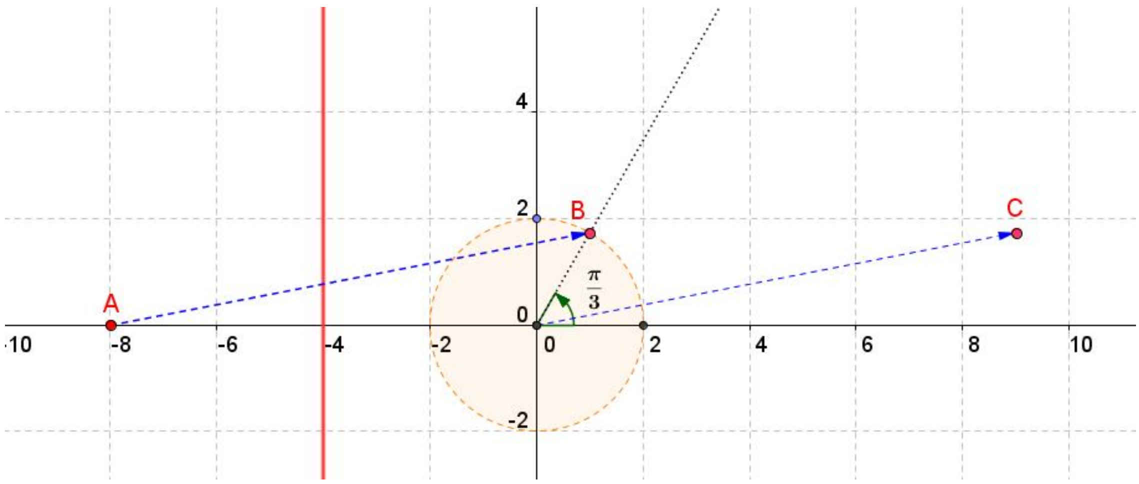
4) c) , 5) c).



Exercice 4 :

$z \in \mathbb{C}$, $|z| = 2$ et $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

1) $u = z^3$. $|u| = |z|^3 = 8$ et $\arg(u) \equiv \arg(z^3)[2\pi] \equiv 3\arg(z)[2\pi] \equiv \pi[2\pi]$.
   donc $u = 8(\cos\pi + i\sin\pi)$.
   $v = 2z$. $|v| = |2z| = 2|z| = 4$ et $\arg(v) \equiv \arg(2z)[2\pi] \equiv \arg(z)[2\pi] \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.
   donc $v = 4(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$.
2) a) Voir figure.
   b) $w = 2z - z^3 = v - u \Leftrightarrow \text{aff}(\overrightarrow{OC}) = \text{aff}(\overrightarrow{OB}) - \text{aff}(\overrightarrow{OA}) \Leftrightarrow \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$
   $\Leftrightarrow \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB}$. Ainsi OABC est un parallèlogramme .
   c) Voir figure.
3) $|t| = |t - 1 - i\sqrt{3}| \Leftrightarrow |z_M - z_O| = |z_M - z_A| \Leftrightarrow MA = MO \Leftrightarrow M \in$ med[OA]
4) a) On a $z = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$ donc $z^n = 2^n(\cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3})$ (Formule de Moivre).
   c) M_n appartient à la droite $(O,\vec{\imath})$ $\Leftrightarrow z^n$ réel $\Leftrightarrow \sin\frac{n\pi}{3} = 0 \Leftrightarrow \frac{n\pi}{3} = k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.
   $\Leftrightarrow n = 3k, k \in \mathbb{Z}$.



WWW.DEVOIR@T.NET © 2014