

Lycée Tahar Sfar Mahdia	<u>Devoir de synthèse n° 3</u> Mathématiques	Niveau : 3 ^{ème} Math
Date : 28 / 05 / 2014	Prof : MEDDEB Tarek	Durée : 3 heures

NB : Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction et à la présentation.

Exercice n°1 : (5,5 pts)

Partie A

Soit E l'ensemble des suites réelles (X_n) qui vérifient la relation de récurrence :

$$X_{n+2} = X_{n+1} + X_n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

- 1) Soient (a_n) et (b_n) deux suites de l'ensemble E , et soient α et β deux réels.
Montrer que la suite (c_n) définie par : $c_n = \alpha a_n + \beta b_n$ est un élément de l'ensemble E .
- 2) Soit (a_n) une suite géométrique de raison $q \neq 0$ et de premier terme $a_0 \neq 0$.
Comment choisir q pour que (a_n) soit élément de l'ensemble E ?

Partie B

On appelle suite de Fibonacci la suite définie sur \mathbb{N} par :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \text{ et } U_1 = 1 \\ U_{n+2} = U_{n+1} + U_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- 1) a/ Démontrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1} \cdot U_{n-1} - U_n^2 = (-1)^n$.
b/ En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, U_n et U_{n+1} sont premiers entre eux.
- 2) On pose : $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n = \sum_{k=0}^n U_k$.
a/ Calculer S_0, S_1, S_2, S_3 et S_4 .
b/ Démontrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = U_{n+2} - 1$.

Partie C

On pose : $q_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $q_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

On définit les suites (a_n) et (b_n) telles que : $a_n = q_1^n$ et $b_n = q_2^n$.

- 1) Déterminer les réels α et β tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \alpha a_n + \beta b_n$.
(On utilisera le fait que $U_0 = 0$ et $U_1 = 1$).
- 2) On pose : $V_n = \frac{U_{n+1}}{U_n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a/ Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $V_n = \frac{q_1 \left(\frac{q_1}{q_2} \right)^n - q_2}{\left(\frac{q_1}{q_2} \right)^n - 1}$.

b/ En déduire que : $\lim_n V_n = q_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. (cette limite est le nombre d'or).

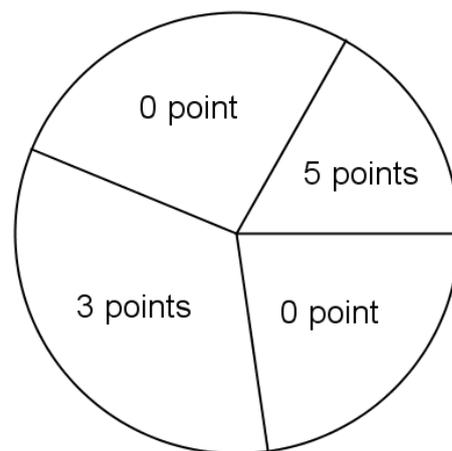
Exercice n°2 : (4,5 pts)

- 1) a/ Citer le petit théorème de Fermat.
b/ Soit p un nombre premier, et n un entier naturel premier avec p .
Montrer que p divise $n^{p-1} - 1$.
- 2) On considère la suite u définie sur \mathbb{N} par : $u_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$.
a/ Calculer les quatre premiers termes de la suite.
b/ Montrer par récurrence que : pour tout entier $n \geq 1$, $9^n - 1$ est divisible par 4.
c/ En déduire que : pour tout entier $n \geq 1$, u_{2n} est divisible par 4.
- 3) Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 5, on se propose de démontrer que :
 p divise u_{p-2} . Pour cela :
a/ Montrer que p divise $6 \times 2^{p-2} - 3$ et que p divise $6 \times 3^{p-2} - 2$.
b/ En déduire que p divise $6 \times u_{p-2}$.
c/ Conclure.

Exercice n°3 : (4,5 pts)

Un jeu consiste à lancer des fléchettes sur une cible. La cible est partagée en quatre secteurs comme indiqué sur la figure.

On suppose que les lancers sont indépendants et que le joueur touche la cible à tous les coups.



- 1) Le joueur lance une fléchette.
On note p_0 la probabilité d'obtenir 0 point.
On note p_3 la probabilité d'obtenir 3 points.
On note p_5 la probabilité d'obtenir 5 points.
On a donc : $p_0 + p_3 + p_5 = 1$.
Sachant que : $p_5 = \frac{1}{2} p_3$ et que $p_5 = \frac{1}{3} p_0$.
Déterminer les valeurs de p_0 , p_3 et p_5 .
- 2) Une partie de ce jeu consiste à lancer trois fléchettes au maximum. Le joueur gagne la partie s'il obtient un total (pour les trois lancers) supérieur ou égal à 8 points. Si au bout de deux premiers lancers, il a un total supérieur ou égal à 8 points, il ne lance pas la troisième fléchette.
On considère les événements :
 G_2 : « Le joueur gagne la partie en deux lancers ».
 G_3 : « Le joueur gagne la partie en trois lancers ».
 P : « Le joueur perd la partie ».
a/ Montrer que : $p(G_2) = \frac{5}{36}$. On admettra dans la suite que $p(G_3) = \frac{7}{36}$.
b/ En déduire $p(P)$.

3) Un joueur joue quatre parties avec les règles données à la question 2). On suppose que le résultat d'une partie n'influe pas sur les autres.

Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « Le joueur gagne exactement une partie ».

B : « Le joueur gagne au moins une partie ».

4) Une urne U_1 contient une boule rouge et deux boules noires, et une urne U_2 contient une boule rouge et trois boules noires. Toutes les boules sont indiscernables au toucher. Un joueur joue une partie de fléchettes avec les règles données à la question 2). S'il gagne la partie, il tire une boule de l'urne U_1 . S'il perd, il tire une boule de U_2 .

Déterminer la probabilité de l'événement :

R : « La boule tirée est rouge ».

Exercice n°4 : (5,5 pts)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(1; 0; 0)$; $B(-1; 2; 0)$; $C(-1; 0; 2)$ et $D(1; 2; 2)$.

1) Montrer que le triangle ABC est équilatéral.

2) Vérifier qu'une équation du plan (ABC) est : $x + y + z - 1 = 0$.

3) Soit G le point de coordonnées $\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Montrer que G est le centre de gravité du triangle ABC .

4) Soit \mathcal{C} le cercle circonscrit au triangle ABC .

a/ Montrer que (DG) est l'axe de \mathcal{C} .

b/ Montrer que le tétraèdre $ABCD$ est régulier.

5) Pour tout réel α , on désigne par S_α l'ensemble des points $M(x; y; z)$ vérifiant l'équation : $x^2 + y^2 + z^2 - 2(\alpha - 1)x - 2\alpha y - 2\alpha z + 2\alpha - 3 = 0$.

a/ Montrer que S_α est la sphère de centre $I_\alpha(\alpha - 1; \alpha; \alpha)$ et de rayon $R_\alpha = \sqrt{3\alpha^2 - 4\alpha + 4}$

b/ Vérifier que A appartient à S_α .

c/ Montrer que I_α appartient à la droite (DG) .

d/ Déterminer l'intersection de la sphère S_α et le plan (ABC) .

6) Montrer qu'il existe un réel α_0 , que l'on déterminera, tel que la sphère S_{α_0} est circonscrite

au tétraèdre $ABCD$. Vérifier que $\overrightarrow{GI_{\alpha_0}} = \frac{1}{4} \overrightarrow{GD}$.

Bonne chance