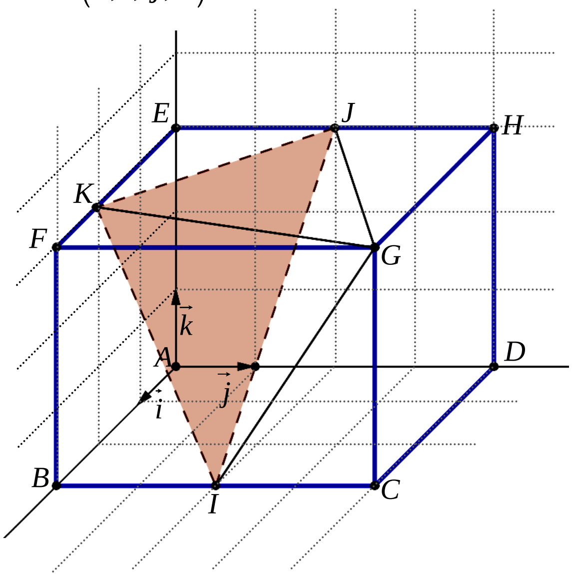
Mathématiques	*Devoir de Synthèse N° 3*	
3ème Maths : M2 Date : le 05 / 06 / 2010	Durée : 3heures Coefficient : 4	*Enseignant : Ghadhab Lassad*

Le sujet comporte 3 pages

Exercice N°1 : *4,5 points*

L'espace est muni d'un repère orthonormé de sens direct $\left(A;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

On considère le parallélépipède $ABCDEFGH$ tel que $\overrightarrow{AB}=3\vec{i}$, $\overrightarrow{AD}=4\vec{j}$ et $\overrightarrow{AE}=3\vec{k}$.



1) Vérifier que $\overrightarrow{AG}=3\vec{i}+4\vec{j}+3\vec{k}$. — 0,25

2) Soit les points I et J milieux respectives des arrêtes $[BC]$ et $[EH]$

   Soit K le point définie par : $\overrightarrow{EK}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

   $a-$ Déterminer les coordonnées de I et J et vérifier que K a pour coordonnées $(2,0,3)$. — 0,75

   $b-$ Déterminer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{KI}$ et $\overrightarrow{KJ}$ et vérifier que $\overrightarrow{KI}\wedge\overrightarrow{KJ}=6\vec{i}+6\vec{j}+6\vec{k}$ — 0,75

3) $a-$ Calculer l'aire du triangle IJK. — 0,5
   $b-$ Calculer le volume du tétraèdre $IJKG$. — 0,5
   $c-$ En déduire la distance de G au plan (IJK). — 0,5

4) Ecrire une équation cartésienne du plan (IJK). — 0,5

5) Soit G' le point tel que (IJK) est le plan médiateur de segment $[GG']$ et N le projeté orthogonal de G sur le plan (IJK).

   $a-$ Montrer que N a pour coordonnées $\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{7}{3},\dfrac{4}{3}\right)$. — 0,5

   $b-$ En déduire les coordonnées du point G'. — 0,25

Exercice N°2 : *2 points*

L'espace est rapporté à un repère orthonormé directe $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère le plan P d'équation cartésienne : $x-y+2z-3=0$ et un point $A(1,2,3)$.

1) Déterminer une représentation paramétrique d'une droite Δ qui passe par A et perpendiculaire à P. 0,75

2) La droite Δ coupe P en un point H.
   a – Déterminer les coordonnées du point H. 0,5
   b – Ecrire une équation cartésienne de la sphère S de centre A et tel que $S\cap P=\zeta_{\left(H,\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}$ où ζ est un cercle de centre H et de rayon $r=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 0,75

Exercice N°3 : *5,5 points*

I – Soit g une fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x)=2-(x^2+1)\sqrt{x^2+1}$

1) *a* – Montrer que , pour tout $x\in[0;+\infty[$, $g'(x)=-3x\sqrt{x^2+1}$. 0,5
   b – Dresser le tableau de variation de g. 0,5
2) *a* – Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α dans $[0;+\infty[$. 0,25
   b – Vérifier que $\alpha\in\,]0,7\,;0,8[$. 0,25
   c – En déduire que : $g(x)>0$ pour $x\in[0\,;\alpha[$
   et $g(x)<0$ pour $x\in\,]\alpha\,;+\infty[$ 0,25

II – On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}-x+1$.

Soit ζ_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\mathcal{R}=(O,\vec{i},\vec{j})$. (unité $2cm$)

1) *a* – Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. 0,5
   b – Montrer que, pour tout $x\in[0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$. 0,75
   c – En déduire le tableau de variation de f sur $[0;+\infty[$. 0,25
2) Soit D la droite d'équation $y=-x+3$
   a – Montrer que D est asymptote à ζ_f au voisinage de $+\infty$. 0,5
   b – Montrer que pour tout $x\in[0;+\infty[$ on a : $x-\sqrt{x^2+1}<0$. 0,25
   c – En déduire la position relative de ζ_f par rapport à D. 0,25
3) *a* – Montrer que : $\sqrt{\alpha^2+1}=\dfrac{2}{\alpha^2+1}$. (où α est le réel trouvé dans **I**) 0,25
   b – En déduire que $f(\alpha)=\alpha^3+1$. 0,25
4) Tracer D et ζ_f. (on prend $\alpha=0,75$) 0,75

Exercice N°4 : *4 points*

Une urne U_1 contient 7 boules indiscernables au toucher, réparties comme suit :

- 4 blanches numérotées : 0, 0, –1 , 2
- et 3 rouges numérotées : 1, 1, –1.

1) On tire simultanément et au hasard 3 boules de l'urne U_1.
   a – Quelles est la probabilité de chacun des événements suivants :
   A : « obtenir une seule boule blanche » 0,5
   B : « obtenir exactement deux boules portant un numéro supérieur ou égale à 0 » 0,5

   b – Calculer : $P(A \cup B)$. 0,75

2) On tire successivement et sans remise 4 boules de l'urne U_1.
   Quelles est la probabilité de chacun des événements suivants :
   S : ″ obtenir quatre boules portant des numéros dont la somme est nulle ″ 0,5
   C : ″ obtenir une boule blanche au $3^{ème}$ tirage et une boule rouge au $4^{ème}$ tirage ″ 0,5

3) Une urne U_2 contient 5 boules numérotées : 0, 0, 0, 1, 1.
   On tire, au hasard, une boule de l'urne U_1 puis une boule de U_2.
   On désigne par *a* le numéro inscrit sur la boule tirée de U_1 et par *b* celui de la boule tirée de U_2.

   On considère *P* le plan complexe rapporté à un repère orthonormé R = $(O, \vec{u}, \vec{v})$
   Soit M un point du plan d'affixe $Z = a + ib$.

   Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
   G : ″ M est un point de la droite $(O, \vec{u})$ et distinct de O.″ 0,5
   H : ″ M est un point du cercle ζ de centre O et de rayon $\sqrt{2}$ ″ 0,75

Exercice N°5 : *4 points* *(les parties* **I** *,* **II** *et* **III** *sont indépendantes)*

I – 1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$, $(x+1)^n - nx - 1$ est divisible par x^2.
   a) En utilisant le théorème de récurrence sur l'entier *n*. 0,75
   b) En utilisant la formule du binôme de Newton. 0,5

2) En déduire le reste de la division euclidienne de 4^{2010} par 9. 0,5

II – Déterminer les nombres **premiers** *p* tels que *p* divise $8^p + 20$. 0,75
(Utiliser le petit théorème de Fermat).

III – Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. On pose $A = n - 1$ et $B = 5n^3 + 7n$.

1) Développer : $(n-1)(5n^2 + 5n + 12)$. 0,25
2) Montrer que $A \wedge B = A \wedge 12$. 0,5
3) Quelles sont les valeurs possibles de $A \wedge B$. 0,25
4) Pour quelles valeurs de *n*, le nombre $F = \dfrac{5n^3 + 7n}{n-1}$ est-il un entier naturel ? 0,5

CORRECTION DU DEVOIR DE SYNTHÈSE N°3

EXERCICE N°1 :

1) $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=3\vec{i}+4\vec{j}+3\vec{k} \quad \Rightarrow G(3,4,3)$

2) a-On a $I(3,2,0)$, $J(0,2,3)$ et $k(2,0,3)$

b- On a : $\overrightarrow{KI}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{KJ}\begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix}$

$$\begin{array}{c|c} 1 & -2 \\ \hline 2 & 2 \\ -3 & 0 \\ 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{array} \Rightarrow \overrightarrow{KI}\wedge\overrightarrow{KJ}\begin{pmatrix}6\\6\\6\end{pmatrix}$$

3) a- $aire(IJK)=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{KI}\wedge\overrightarrow{KJ}\right\|=\frac{1}{2}\sqrt{36+36+36}=3\sqrt{3}$

b- $V(IJKG)=\frac{1}{6}\left|dét\left(\overrightarrow{KI},\overrightarrow{KJ},\overrightarrow{KG}\right)\right|=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{KI}\wedge\overrightarrow{KJ}\right).\overrightarrow{KG}\right|=\frac{1}{6}|6+24+0|=\frac{1}{6}|30|=5$

c- $V=\frac{1}{3}aire(IJK)\times d(G,(IJK)) \quad \Rightarrow \quad d(G,(IJK))=\frac{3V}{aire(IJK)}=\frac{3\times5}{3\sqrt{3}}=\frac{5}{\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{3}$

4) Soit $\vec{n}=\overrightarrow{KI}\wedge\overrightarrow{KJ}$ un vecteur normal de (IJK)

$M(x,y,z)\in(IJK)$ alors $6x+6y+6z+d=0$

$I(3,2,0)\in(IJK)$ alors $18+12+d=0$

$30+d=0$

$d=-30$

D'où $6x+6y+6z-30=0 \quad \Rightarrow (IJK): x+y+z-5=0$

5) a- On a $\overrightarrow{GN}\begin{pmatrix}\frac{4}{3}-3\\ \frac{7}{3}-4\\ \frac{4}{3}-3\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{GN}\begin{pmatrix}-\frac{5}{3}\\ -\frac{5}{3}\\ -\frac{5}{3}\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}6\\6\\6\end{pmatrix}$

- On a $\overrightarrow{GN}=-\frac{5}{18}\times\vec{n}$ alors $\overrightarrow{GN}$ *et* $\vec{n}$ sont colinéaires.
- $(IJK): x+y+z-5=0$ et $N\left(\frac{4}{3},\frac{7}{3},\frac{4}{3}\right)$

On a $\frac{4}{3}+\frac{7}{3}+\frac{4}{3}-5=\frac{15}{3}-5=5-5=0 \quad \Rightarrow N\in(IJK)$

Conclusion : $N\left(\frac{4}{3},\frac{7}{3},\frac{4}{3}\right)$ est **<u>le projeté orthogonal</u>** de G sur (IJK)

b- (IJK) est **le plan médiateur** de $[GG']$ et N **le projeté orthogonal** de G sur (IJK) **alors** $N = G * G'$

$$\begin{cases} \dfrac{x_{G'}+x_G}{2} = x_N \\ \dfrac{y_{G'}+y_G}{2} = y_N \\ \dfrac{z_{G'}+z_G}{2} = z_N \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{G'} = 2x_N - x_G = \dfrac{8}{3} - 3 = -\dfrac{1}{3} \\ y_{G'} = 2y_N - y_G = \dfrac{14}{3} - 4 = \dfrac{2}{3} \\ z_{G'} = 2z_N - y_G = \dfrac{8}{3} - 3 = -\dfrac{1}{3} \end{cases} \quad \boxed{\Rightarrow G'\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)}$$

EXERCICE N°2 :

1) Soit $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ un vecteur normal de P

$\Delta \perp P \Rightarrow \vec{n}$ est **un vecteur directeur** de P donc $\Delta = D(A,\vec{n})$.

- Soit $M(x,y,z) \in \Delta$ **si et seulement si** il existe $\alpha \in IR$ tel que $\overrightarrow{AM} = \alpha\vec{n}$

si et seulement si $\begin{cases} x = 1+\alpha \\ y = 2-\alpha \\ z = 3+2\alpha \end{cases}$; $\alpha \in IR$

2) a- $M(x,y,z) \in P \cap \Delta$ équivaut $\begin{cases} x = 1+\alpha \\ y = 2-\alpha \\ z = 3+2\alpha \\ x-y+2z-3=0 \end{cases}$ équivaut $\begin{cases} x = 1+\alpha \\ y = 2-\alpha \\ z = 3+2\alpha \\ 1+\alpha-2+\alpha+6+4\alpha-3=0 \end{cases}$

équivaut $\begin{cases} x = 1+\alpha \\ y = 2-2\alpha \\ z = 3+2\alpha \\ 6\alpha = -2 \end{cases}$ équivaut $\begin{cases} x = 1+-\dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3} \\ y = 2+\dfrac{1}{3} = \dfrac{7}{3} \\ z = 3+-\dfrac{2}{3} = \dfrac{7}{3} \\ \alpha = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$ $\boxed{\Rightarrow H\left(\frac{2}{3},\frac{7}{3},\frac{7}{3}\right)}$

b- $S \cap P = \zeta_{\left(H, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}$ alors $r = \sqrt{R^2 - d^2}$ $éq$ $r^2 = R^2 - d^2$ $éq$ $R^2 = r^2 + d^2$ $\Rightarrow R = \sqrt{r^2 + d^2}$

Avec $d = d(A,P) = \dfrac{|1-2+6-3|}{\sqrt{1+1+4}} = \dfrac{2}{\sqrt{6}}$ $\Rightarrow R = \sqrt{\dfrac{1}{3} + \dfrac{4}{6}} = \sqrt{1} = 1$

Alors une équation du sphère S est : $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 1$

EXERCICE N°3 :

I-1) a- $x \mapsto x^2 + 1$ est dérivable et strictement positive sur $[0,+\infty[$.

Alors $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ est dérivable sur $[0,+\infty[$ Donc g est dérivable sur $[0,+\infty[$.

On a $\forall x \in [0,+\infty[$ alors $g'(x) = -2x\sqrt{x^2+1} - (x^2+1) \times \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$

$$= -2x\sqrt{x^2+1} - \frac{x(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{-2x(x^2+1) - x(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{-3x(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= -3x\sqrt{x^2+1}$$

b- $x \in [0,+\infty[$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Tableau de variation :

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	0	$-$	
$g(x)$	1	$\searrow$	$-\infty$

$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 + 1 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{+\infty} g = -\infty$

$g(0) = 2 - 1 = 1$

2)a- g est continue et strictement décroissante sur $[0,+\infty[$ et $g([0,+\infty[) =]-\infty,1]$

Or $0 \in]-\infty,1]$ donc $g(x) = 0$ admet une **<u>unique</u>** solution $\alpha \in [0,+\infty[$

b- on a : $\left.\begin{array}{l} g(0{,}7) \approx 0{,}18 \\ \text{et } g(0{,}8) \approx -0{,}1 \end{array}\right\} \Rightarrow g(0{,}7) \times g(0{,}8) < 0$ alors $\alpha \in]0{,}7;0{,}8[$

c- g est continue et strictement décroissante sur $[0,+\infty[$ et $g(\alpha)=0$ $\Rightarrow$

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

II- a- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}-x+1=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}-x+1=-\infty$

Car $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=2$

b- $$f'(x)=\frac{2\times\sqrt{x^2+1}-2x\times\dfrac{2x^2}{2\sqrt{x^2+1}}}{\left(x^2+1\right)}-1$$

$$=\frac{2\left(x^2+1\right)-2x^2}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}-1$$

$$=\frac{2}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}-1=\frac{2-\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}=\frac{g(x)}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}$$

c- Le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $g(x)$ pour $x\in[0,+\infty[$

Tableau de variation

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

2) **a-** $f(x)-y=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}-x+1+x-3\ =\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}-2\ =\dfrac{2}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}-2$

$\lim\limits_{x\to-2}\left(f(x)-y\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}-2=2-2=0$

$\Rightarrow \Delta : y=-x+3$ est une asymptote à ζ_f au $\vee(+\infty)$

b- On a $\forall x\in[0,+\infty[$; $x^2<x^2+1$ *éq* $\sqrt{x^2}<\sqrt{x^2+1}$ *éq* $x<\sqrt{x^2+1}$ *éq* $x-\sqrt{x^2+1}<0$

c- $f(x)-y=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}-2 \;=\dfrac{2x-2\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} \;=\dfrac{2\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+1}}<0 \quad \forall x\in[0,+\infty[$

Alors ζ_f est au dessous de Δ .

3) a- On a $g(\alpha)=0 \Leftrightarrow 2-(\alpha^2+1)\sqrt{\alpha^2+1}=0$

$$\Leftrightarrow (\alpha^2+1)\sqrt{\alpha^2+1}=2$$

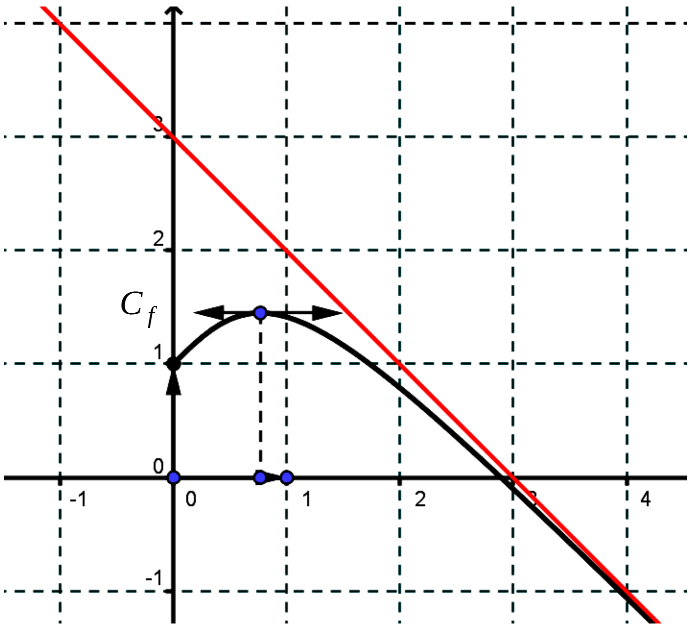
$$\Leftrightarrow \sqrt{\alpha^2+1}=\frac{2}{\alpha^2+1}$$

b- On a $f(\alpha)=\dfrac{2\alpha}{\sqrt{\alpha^2+1}}-\alpha+1 \;=\dfrac{2\alpha}{\dfrac{2}{\alpha^2+1}}-\alpha+1 \;=\alpha(\alpha^2+1)-\alpha+1=\alpha^3+\alpha-\alpha+1=\alpha^3+1$

4) $\Delta : y=-x+3$

x	1	3
y	2	0

Courbe



EXERCICE N°4 :

1) a- $P(A)=\dfrac{C_4^1\times C_3^2}{C_7^3}=\dfrac{12}{35}$

$$P(B)=\frac{C_5^2\times C_2^1}{C_7^3}=\frac{20}{35}=\frac{4}{7}$$

b- $P(A\cap B)=\dfrac{C_3^1\times C_2^1\times C_1^1+C_1^1\times C_2^2}{C_7^3}=\dfrac{7}{35}$

$\Rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\dfrac{12}{35}+\dfrac{20}{35}-\dfrac{7}{35}=\dfrac{25}{35}=\dfrac{5}{7}$

2) $(0,0,-1,1)$ ou $(2,-1,-1,0)$ ou $(1,1,-1,-1)$

$$P(s)=\frac{4!}{2!}\left(\frac{2}{7}\times\frac{1}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{4}\right)+\frac{4!}{2!}\left(\frac{1}{7}\times\frac{2}{6}\times\frac{1}{5}\times\frac{2}{4}\right)+\frac{4!}{2!2!}\left(\frac{2}{7}\times\frac{1}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}\right)$$

$$=12\times\left(\frac{2}{210}\right)+12\times\left(\frac{1}{210}\right)+6\times\left(\frac{1}{210}\right)=\frac{1}{5}$$

- $(.\ ,\ .\ ,B\ ,R\ )\quad P(C)=\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}=\frac{2}{7}$

3) $M\in(O,\vec{u})-\{O\}$ ssi $Z\in IR^*$ ssi $a\neq 0$ et $b=0$ $\quad(a=\overline{0}\,,b=0)$

$$\Rightarrow\ P(G)=\frac{3}{5}\times\frac{5}{7}=\frac{3}{7}$$

- $M\in\zeta_{(O,\sqrt{2})}$ ssi $OM=\sqrt{2}\Leftrightarrow|Z|=\sqrt{2}\ \Leftrightarrow\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2}\ \Leftrightarrow a^2+b^2=2$

$(a=1,b=1)$ *ou* $(-1,1)\ \Rightarrow\ P(H)=\frac{2}{7}\times\frac{2}{5}+\frac{2}{7}\times\frac{2}{5}=\frac{8}{35}$

EXERCICE N°5 :

I – 1) a) Soit la propriété $P(n)$: pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $(x+1)^n-nx-1$ est divisible par x^2.

- Pour $n=1$: $(x+1)^1-x-1=0$ et $x^2/0\ \Rightarrow P(0)$ est vraie.
- Soit $n\in\mathbb{N}^*$, supposons que $x^2/(x+1)^n-nx-1$, montrons que $x^2/(x+1)^{n+1}-(n+1)x-1$.

$$\begin{aligned}(x+1)^{n+1}-(n+1)x-1&=(x+1)^n\times(x+1)-nx-x-1\\&=(x+1)\left[(x+1)^n-nx-1\right]-(x+1)(-nx-1)-nx-x-1\\&=(x+1)\left[(x+1)^n-nx-1\right]+nx^2+x+nx+1-nx-x-1\\&=(x+1)\left[\underbrace{(x+1)^n-nx-1}_{\text{d' aprés l' hypothèse de récurrence divisible par } x^2}\right]+\underbrace{nx^2}_{\text{divisible par } x^2}\end{aligned}$$

Donc $x^2/(x+1)^{n+1}-(n+1)x-1\ \Rightarrow P(n+1)$ est vraie.

<u>Conclusion</u> : pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $(x+1)^n-nx-1$ est divisible par x^2.

b) Pour $n=1$, $(x+1)^1 - x - 1 = 0 = 0\times x^2$ est divisible par x^2.

Pour $n \geq 2$, on utilise la formule de binôme de Newton :

$$
\begin{aligned}
(x+1)^n - nx - 1 &= C_n^n x^n + C_n^{n-1}x^{n-1} + \dots\dots\dots + C_n^2 x^2 + C_n^1 x^1 + C_n^0 x^0 - nx - 1 \\
&= x^n + C_n^{n-1}x^{n-1} + \dots\dots\dots + C_n^2 x^2 + nx + 1 - nx - 1 \\
&= x^2 \underbrace{\left(x^{n-2} + C_n^{n-1}x^{n-3} + \dots\dots\dots + C_n^2\right)}_{p} \\
&= x^2 \times p
\end{aligned}
$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(x+1)^n - nx - 1$ est divisible par x^2.

2) On a : $9 = 3^2$ alors : $x = 3$ et $4^{2010} = (3+1)^{2010}$

D'après 1) on a : $(3+1)^{2010} - 2010\times 3 - 1 = 4^{2010} - 6031$ est divisible par 3^2

$$
\begin{aligned}
4^{2010} &= \left(4^{2010} - 6031\right) + 6031 \\
&= \underbrace{\left(4^{2010} - 6031\right)}_{\text{divisible par } 9} + \underbrace{670\times 9}_{\text{divisible par } 9} + 1
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ Le reste est égal à : 1

II – p est **premier** alors d'après le petit théorème de Fermat : $p / 8^p - 8$

On a : $\left.\begin{array}{l} p/8^p - 8 \\ p/8^p + 20 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad p/\left(8^p + 20\right) - \left(8^p - 8\right) \;\Leftrightarrow\; p/28$

On a : $D_{28} = \{1,2,4,7,14,28\}$ donc $p = \{2,7\}$

III – 1) $(n-1)\left(5n^2 + 5n + 12\right) = 5n^3 + 7n - 12$

2)
$$
\begin{aligned}
A \wedge B &= (n-1) \wedge \left(5n^3 + 7n\right) \\
&= (n-1) \wedge \left(5n^3 + 7n - 12\right) + 12 \\
&= (n-1) \wedge (n-1)\left(5n^2 + 5n + 12\right) + 12 \\
&= (n-1) \wedge 12 \\
&= A \wedge 12
\end{aligned}
$$

3) Soit $d = A \wedge B = A \wedge 12$ alors $d \in D_{12} = \{1,2,3,4,6,12\}$

4) F est un entier naturel <u>si et seulement si</u> $(n-1)/(5n^3+7n)$

Alors $(n-1) \wedge (5n^3+7n) = (n-1)$ donc $(n-1)/12$

$\Rightarrow$ $(n-1)$ peut donc prendre les valeurs : $1;2;3;4;6;12$.

Les valeurs de n qui conviennent sont $2;3;4;5;7;13$.