Lycée El Mnihla Date : 31-o6-2011 Durée : 3 heures	Ministère de l'Education **DEVOIR DE SYNTHESE N° 3** *Epreuve de Mathématiques de 3ème Maths*	PROF : KROUNA.B

(note : le barème sera noté sur 40 pts)

Exercice n°1 :(9,5 pts)

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct (o ;$\vec{u}$;$\vec{v}$) , on considère :

- * le point A d'affixe a= 5 - i$\sqrt{3}$
- * le point B d'affixe b= 4 + i2$\sqrt{3}$.
- *le point Q le milieu de [OB].

1°/ a. Calculer OA , OB , et arg ($\frac{b}{a}$) (Rq : écrire ($\frac{b}{a}$) sous forme algébrique)

b. Déduire que OAB est un triangle équilatéral direct.

c. Montrer que l'affixe de Q est q= 2 + i$\sqrt{3}$.

d. Soit le point K pour que ABQK soit un parallélogramme, montrer que z_k = 3 – i2$\sqrt{3}$.

e. Démontrer que $\frac{Z_K - a}{Z_K}$ est imaginaire pur.

f. Qu'en déduit-on pour le triangle OKA.

g. préciser la nature du quadrilatère OQAK.

2°/ Soit C le point d'affixe c = $\frac{2a}{3}$

a. Calculer $\frac{Z_K - b}{Z_K - c}$

b. Déduire que les points B , C et K sont alignés.

Exercice N°2(8 pts)

Une urne contient 2 boules blanches et 4 boules noires indiscernables au toucher.

1/ On tire au hasard et simultanément 2 boules de l'urne

Calculer la probabilité des évènements suivants :

a. A : « avoir au moins une boule blanche » .
b. B : « avoir 2 boules de couleur différentes ».

2/ On tire maintenant au hasard et successivement avec remise les deux boules.

a. Calculer la probabilité des évènements A et B de la première question.

b. On effectue n tirages successifs avec remise et on note p_k la probabilité d'avoir une boule blanche pour la première fois au k-ième tirage ($1 \leq k \leq n$).

i) Calculer : p_1 , p_2 et p_5.
ii) Calculer : p_k ; avec ($1 \leq k \leq n$).
iii) Déduire en fonction de n l'expression $S_n = \sum_{k=1}^{n} p_k$, puis $\lim_{+\infty} S_n$.

Exercice N°3 (12,5)

Soit la fonction définie sur [2, +∞ [par $f(x) = \frac{x^2}{2x-2}$

1/ Etudier la variation de f sur [2, +∞ [.

2/ On considère la suite définie par : $U_0 = 4$ et pour tout entier n, $U_{n+1} = f(U_n)$

a. Montrer que pour tout n , $U_n \geq 2$.

Voir verso

b. Montrer que (U_n) est une suite monotone.
c. Déduire que (U_n) est une suite convergente.

3/ a. Montrer que pour tout n, $U_{n+1} - 2 \leq \frac{1}{2}(U_n - 2)$.

b. Déduire que pour tout n, $0 \leq U_n - 2 \leq (\frac{1}{2})^{n-1}$.

c. Déterminer, alors, $\lim_{+\infty} U_n$

4/ Montrer, par récurrence, que pour tout n, $U_n = \dfrac{2}{1-(\frac{1}{2})^{2^n}}$, et Retrouver, $\lim_{+\infty} U_n$.

5/ Montrer, par récurrence e, que : $1^3+2^3+3^3+\ldots\ldots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ pout $n\geq 1$

6/ On pose $S_n = \dfrac{2}{n^4}(1^3U_1+2^3U_2+3^3U_3+\ldots\ldots+n^3U_n) = \frac{2}{n^4}\sum_{p=1}^{n} p^3U_p$,pour tout $n\geq 1$

a. Montrer que pour $n\geq 1$, $\frac{2}{n^4}\sum_{p=1}^{n} p^3(U_p - 2) = S_n - (1+\frac{1}{n})^2$.

b. Montrer que, pour tout $n\geq 1$ $\sum_{p=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{p-1} = 2\,(1 - \frac{1}{2^n})$

c. Montrer que pour $n\geq 1$, $\left|S_n - (1+\frac{1}{n})^2\right| \leq \frac{4}{n}(1 - \frac{1}{2^n})$ (Rq : $p^3 \leq n^3$ pour $p\leq n$)

d. Déduire $\lim_{+\infty} S_n$.

Exercice N°4 (10 pts)

Soit $R=(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère orthonormé direct de l'espace.

On donne : A(1,-1,1) ; $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$

1/ a. Vérifier que $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires.

b. Déterminer les composantes du produit vectoriel $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$.

c. Soit le plan $P = (A,\vec{u},\vec{v})$, déterminer une équation cartésienne de P.

2/ a. Soit B(1,-1,0) , montrer que le point B n'appartient pas au plan P.

b. Soit (D) la droite perpendiculaire à P passant par B

Déterminer une représentation paramétrique de (D).

3/ On donne l'ensemble E définie par : (E) : $x^2 + y^2 + z^2 -2x + 2y -4z -1 = 0$.

a. Dire pourquoi (E) est une sphère.
b. Déterminer leur rayon r et les coordonnées de leur centre H.

4/ a. Déterminer les composantes de $\overrightarrow{HB} \wedge \vec{w}$

b. Montrer que (D) et (E) sont sécants.

c. Déterminer les coordonnées de leurs points d'intersections.

BON TRAVAIL