Lycée Tahar Sfar Mahdia	**Devoir de contrôle n° 3** Mathématiques	Niveau : 3 ème Math
Date : 27 / 04 / 2015	Prof : MEDDEB Tarek	Durée : 2 heures

NB : *Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction et à la présentation.*

Exercice n°1 : (5 pts)

On considère la suite U définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = 0 \text{ et } U_1 = 1 \\ U_{n+2} = 7U_{n+1} + 8U_n \text{ pour tout } n \in IN \end{cases}$.

1) On pose pour tout $n \in IN$, $S_n = U_{n+1} + U_n$.

$a/$ Montrer que S est une suite géométrique.

$b/$ Exprimer S_n en fonction de n.

2) On pose pour tout $n \in IN$, $V_n = (-1)^n U_n$ et $W_n = V_{n+1} - V_n$.

$a/$ Exprimer W_n en fonction de S_n.

$b/$ Calculer, en fonction de n, la somme $\sum_{k=0}^{n-1} W_k$.

$c/$ En déduire les expressions de V_n puis de U_n en fonction de n.

3) Calculer : $\lim_{n \to +\infty} \frac{U_n}{8^n}$.

Exercice n°2 : (5 pts)

1) Soient x et y deux entiers naturels non nuls tels que $x \wedge y = 1$.

$a/$ Montrer que $x \wedge (x+y) = 1$ et que $y \wedge (x+y) = 1$.

$b/$ En déduire que $xy \wedge (x+y) = 1$.

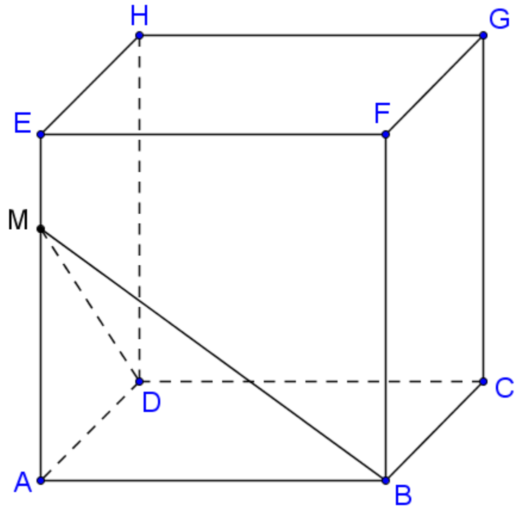
2) Soient a et b deux entiers naturels non nuls, on pose $a \wedge b = d$, et soient a' et b' les entiers tels que $a = da'$ et $b = db'$.

$a/$ Exprimer $a \vee b$ et $a+b$ en fonction de a', b' et d.

$b/$ En déduire que $a \wedge b = (a \vee b) \wedge (a+b)$.

3) Application : Résoudre dans $IN \times IN$ le système : $\begin{cases} a+b = 57 \\ a \vee b = 252 \end{cases}$.

Exercice n°3 : *(8 pts)*



On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête 1.

Soit M un point de la demi-droite $[AE)$ défini par :

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{a}\overrightarrow{AE}$, où a est un réel strictement positif.

1) Déterminer, en fonction de a, le volume $\mathcal{V}$ du tétraèdre $ABDM$.

2) Soit K le barycentre des points pondérés $(M\ ;\ a^2)$, $(B\ ;\ 1)$ et $(D\ ;\ 1)$.

   $a/$ Exprimer $\overrightarrow{BK}$ en fonction de $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BD}$.

   $b/$ Montrer que $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AM} = \frac{1}{a^2+2}$ et que $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AD} = \frac{1}{a^2+2}$.

   $c/$ En déduire que $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{MD} = 0$.

   $d/$ Expliquer, brièvement et sans faire de calcul, pourquoi $\overrightarrow{DK}.\overrightarrow{MB} = 0$.

   $e/$ Montrer que K est l'orthocentre du triangle BDM.

3) $a/$ Démontrer les égalités : $\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{MB} = 0$ et $\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{MD} = 0$.

   $b/$ En déduire que la droite (AK) est perpendiculaire au plan (BDM).

4) $a/$ Démontrer que le triangle BDM est isocèle et que son aire $\mathcal{A}$ est égale à $\frac{\sqrt{a^2+2}}{2a}$.

   $b/$ Déterminer le réel a pour que l'on ait : $\mathcal{A} = \frac{\sqrt{6}}{4}$.

   Déterminer dans ce cas, la distance AK.

5) On suppose dans la suite que $a = 2$, et on considère le repère $(A\ ;\overrightarrow{AB}\ ;\overrightarrow{AD}\ ;\overrightarrow{AE})$.

   $a/$ Déterminer les composantes du vecteur $\vec{n} = \overrightarrow{BD} \wedge \overrightarrow{BM}$.

   $b/$ En utilisant le fait que K appartient au plan (BDM), montrer que les coordonnées $(x\ ;y\ ;z)$ du point K vérifient la relation : $x + y + 2z - 1 = 0$.

   $c/$ En utilisant le résultat de la question 3) $b/$, déterminer les coordonnées de K.

   $d/$ Calculer alors la distance AK.

Exercice n°4 : *(2 pts)*

Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in IN^*$, on a :

$$(6\times1-3)(6\times2-3)(6\times3-3)\times........\times(6n-3) = \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{(2n)!}{n!}.$$