

Lycée Tahar Sfar Mahdia	Devoir de contrôle n° 3 Mathématiques	Niveau : 3 ^{ème} Math
Date : 03 / 05 / 2014	Prof : MEDDEB Tarek	Durée : 2 heures

NB : Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction et à la présentation.

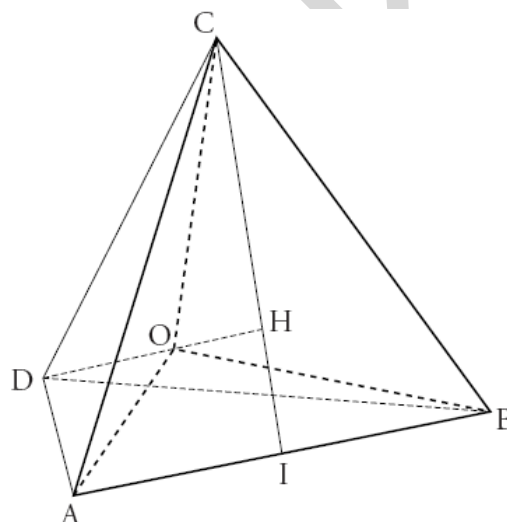
Exercice n°1 : (7 pts)

Soit $OABC$ un tétraèdre tel que :

- ❖ OAB , OAC et OBC sont des triangles rectangles en O .
- ❖ $OA = OB = OC = a$, où a est un réel strictement positif.

On appelle I le pied de la hauteur issue de C du triangle ABC , H le pied de la hauteur issue de O du triangle OIC et D le point de l'espace défini par :

$$\overrightarrow{HO} = \overrightarrow{OD}.$$



1) Quelle est la nature du triangle ABC ? justifier la réponse.

2) a/ Calculer $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AB}$.

b/ En déduire que les droites (OH) et (AB) sont orthogonales.

c/ Montrer alors que : $\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, puis montrer que H est l'orthocentre du triangle ABC .

3) a/ Calculer le volume V du tétraèdre $OABC$, puis l'aire S du triangle ABC .

b/ Exprimer OH en fonction de V et S , en déduire que $OH = a \frac{\sqrt{3}}{3}$.

4) L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(O, \frac{1}{a} \overrightarrow{OA}; \frac{1}{a} \overrightarrow{OB}; \frac{1}{a} \overrightarrow{OC} \right)$.

a/ En remarquant que H est le centre de gravité du triangle ABC , montrer que H a pour coordonnées $\left(\frac{a}{3}; \frac{a}{3}; \frac{a}{3} \right)$.

b/ Montrer que le tétraèdre $ABCD$ est régulier (c'est-à-dire que toutes ses arêtes sont isométriques).

Exercice n°2 : (7 pts)

On considère les suites (U_n) et (V_n) définis sur IN par :

$$U_0 = 1, V_0 = 2 \text{ et pour tout } n \in IN, U_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2} \text{ et } V_{n+1} = \frac{U_{n+1} + V_n}{2}.$$

1) Calculer V_1 .

2) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n = V_n - U_n$.

Montrer que (W_n) est une suite géométrique, puis exprimer W_n en fonction de n .

3) a/ Montrer que la suite (U_n) est croissante et que (V_n) est décroissante.

b/ En déduire que (U_n) et (V_n) sont bornées.

c/ Montrer que : si (U_n) et (V_n) sont convergentes, alors elles convergent vers la même limite.

4) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n W_k$.

Déterminer l'expression de S_n en fonction de n , puis calculer $\lim_n S_n$.

5) a/ Exprimer W_n en fonction de U_n et U_{n-1} .

b/ En déduire que : $S_n = \frac{1}{2}(1 + U_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c/ Montrer alors que (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice n°3 : (6 pts)

On considère les suites (x_n) et (y_n) définies sur \mathbb{N} par : $x_0 = 1$, $y_0 = 8$ et

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = \frac{7}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n + 1 \\ y_{n+1} = \frac{20}{3}x_n + \frac{8}{3}y_n + 5 \end{cases}$$

1) a/ Montrer par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $5x_n - y_n + 3 = 0$.

b/ En déduire que : $x_{n+1} = 4x_n + 2$.

2) Montrer par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n est un entier naturel.

En déduire que y_n est aussi un entier naturel.

3) Montrer que :

a/ x_n est divisible par 3 si, et seulement si, y_n est divisible par 3.

b/ Si x_n et y_n ne sont pas divisibles par 3, alors ils sont premiers entre eux.

4) On pose $z_n = x_n + \frac{2}{3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a/ Montrer que (z_n) est une suite géométrique de raison 4.

b/ Exprimer z_n puis x_n en fonction de n .

c/ En déduire que : $4^n \times 5 - 2$ est un multiple de 3, pour tout $n \in \mathbb{N}$.