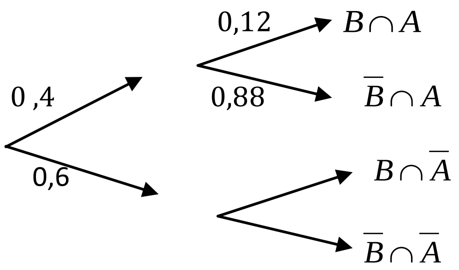
Lycée ch -khaznadar Teboursouk Prof : Rakrouki .M	Devoir de Controle n°3	Classe : 4ème Math Durée : 180 minutes Date : 28/04/2010

Une grande importance sera attachée à la clarté de la rédaction et au soin de la présentation

EXERCICE1(3pts) :

Cocher la réponse exacte :

1) Une expérience aléatoire est représenté par l'arbre pondéré ci-contre :



a) La probabilité de l'événement $A\cap B$ est égale à : $0,048$ ☐ ; $0,12$ ☐ ; $0,3$ ☐.

b) Sachant que $p(B)=0,35$, alors $p(B/\overline{A})$ est égale à : $0,38$ ☐ ; $0,08$ ☐ ; $0,5$ ☐.

2) La durée de vie X, exprimée en années, d'une machine suit la loi exponentielle de paramètre 0,2. La probabilité que la machine ne tombe pas en panne avant 5 ans est égale à :

e^{-1} ☐ ; $1-e^{-1}$ ☐ ; $0,2e^{-1}$ ☐.

3) Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. L'équation $x^2+9y^2=36$ est celle d'une ellipse de centre O et de foyers :

$F(0;4\sqrt{2})$ *et* $F'(0;-4\sqrt{2})$ ☐ ; $F(2\sqrt{10};0)$ *et* $F'(-2\sqrt{10})$ ☐ ; $F(4\sqrt{2};0)$ *et* $F'(-4\sqrt{2};0)$ ☐

EXERCICE2 (4pts):

Tous les résultats de cet exercice seront arrondis à 10^{-3} près. Le tableau suivant donne l'évolution d'un chiffre d'affaires y_i en millions de dinars de 1999 à 2005.

Année	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Rang X_i de l'année	1	2	3	4	5	6	7
Chiffre d'affaires Y_i	125	170	212	250	292	334	362

1) On pose $Z_i=\ln(Y_i)$.

a) Calculer les valeurs de Z_i associées aux rangs X_i du tableau.

b) Représenter, dans un repère orthogonal, le nuage de points de la série statistique (X,Z).

2)a) Calculer le coefficient de corrélation entre X et Z. Un ajustement affine est-il justifié ?

b) Déterminer une équation de la droite D d'ajustement affine de Z en X obtenue par la méthode des moindres carrés puis tracer cette droite dans le même repère.

c) Donner une estimation du chiffre d'affaires en 2010.

3) A partir de quelle année peut-on prévoir que le chiffre d'affaires sera supérieur 980 millions dinars.

EXERCICE3 (5pts):

On considère une urne U_1 contenant 2 boules blanches et 4 boules rouges et une urne U_2 contenant 3 boules blanches et 2 boules rouges. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

I) On tire une boule de U_1 et une boule de U_2.

1)a) Calculer la probabilité des événements suivants :

A : « Obtenir deux boules de même couleur » ; B : « Parmi les deux boules tirées, une au moins est blanche ».

b) Sachant qu'on a obtenu deux boules de couleurs différentes, quelle est la probabilité pour que la boule rouge soit tirée de U_1.

2) Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de boules blanches obtenues.

a) Déterminer la loi de probabilité de X. Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.

b) On répète l'épreuve précédente 5 fois de suite en remettant à chaque fois la boule dans l'urne où elle est tirée. Quelle est la probabilité des événements suivants :

F : « Obtenir exactement trois fois deux boules de même couleur ».

G : « Obtenir deux boules de même couleur pour la première fois au quatrième tirage »

H : « Avoir au plus une fois deux boules de même couleur »

II) On considère l'épreuve suivante : On tire une boule de U_1, si elle est blanche on la garde et on tire une autre boule de U_1, si elle est rouge on la met dans U_2 et on tire successivement sans remise deux boules de U_2. Soit Y la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de boules blanches obtenues au cours de cette épreuve. Déterminer la loi de probabilité de Y.

EXERCICE4(8pts) :

A) Soit n un entier naturel non nul. On considère l'équation différentielle $(E): y'+y=\frac{x^n}{n!}e^{-x}$.

1) Soient g et h deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifient pour tout réel x, $g(x)=h(x)e^{-x}$.

a) Montrer que g est solution de (E) si est seulement si , pour tout réel x, $h'(x)=\frac{x^n}{n!}$.

b) En déduire la fonction h associé à une solution g de (E), sachant que $h(0)=0$. Déterminer alors la fonction g.

2)a) Résoudre l'équation différentielle $(E_0): y'+y=0$.

b) Montrer qu'une fonction φ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ est solution de (E) si est seulement si $\varphi-g$ est solution de l'équation différentielle (E_0).

c) En déduire la solution générale φ de l'équation (E).

d) Déterminer la solution f de l'équation (E) telle que f(0) = 0.

B) Le but de cette partie et de prouver que $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=e$.

1) On considère les fonctions f_0 et f_1 définies sur $\mathbb{R}$ $par: \ f_0(x)=e^{-x} \ et \ f_1(x)=xe^{-x}$.

Vérifier que f_1 est solution de l'équation différentielle $y'+y=f_0$.

2) Pour tout entier naturel non nul n, on note f_n la solution de l'équation différentielle $y'+y=f_{n-1}$ vérifiant $f_n(0)=0$.

En utilisant la partie A) montrer par récurrence que pour tout réel x et tout entier naturel non nul n,

$f_n(x)=\frac{x^n}{n!}e^{-x}$.

3)a) Etudier le variations de f_n sur $\mathbb{R}$ (distinguer les cas n paire et n impaire).

b) Tracer dans un même repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ les courbes C_1 et C_2 respectivement de f_1 et f_2.

4) Pour tout entier naturel non nul n, on pose $I_n=\int_0^1 f_n(x)dx$

a) Montrer que pour tout $x\in[0;1]$, $0\leq f_n(x)\leq\frac{x^n}{n!}$ et que $0\leq I_n\leq\frac{1}{(n+1)!}$ puis déduire la limite de (I_n).

b) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a : $I_n-I_{n-1}=-\frac{1}{n!}e^{-1}$.

c) Calculer I_0 et déduire de ce qui précède que $I_n=1-\frac{1}{e}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$

d) En déduire que $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=e$.

BON TRAVAIL