Lycée ch -khaznadar Teboursouk Prof : Rakrouki .M	Devoir de controle n°3	Classe : 3ème Math Durée : 180 minutes Date : 09/05/11

EXERCICE 1 (3pts):

Cocher la réponse exacte :

Soit ABCDEFGH un parallélépipède et $I = A * B$.

1) Le vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{DH}$ est égal au vecteur : $\overrightarrow{AG}$ ☐ $\overrightarrow{DF}$ ☐ $\overrightarrow{AF}$ ☐

2) Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ le point H a pour coordonnées :

$(0;1;1)$ ☐ $(1;1;1)$ ☐ $(1;1;0)$ ☐

3) Les vecteurs $\overrightarrow{HA}$; $\overrightarrow{HI}$ et $\overrightarrow{HF}$ sont :

Orthogonaux deux à deux ☐ coplanaires ☐ ni l'un ni l'autre ☐

4) $dét(\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{ID}, \overrightarrow{IF}) \neq 0$ ☐ $dét(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{DH}, \overrightarrow{BF}) \neq 0$ ☐ $dét(\overrightarrow{IG}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{IC}) \neq 0$ ☐

EXERCICE 2 (4pts):

1) Soit $n \in$ ℕ et $A = n^4 - 3n^2 + 1$. Vérifier que $A = (n^2 - n - 1)(n^2 + n - 1)$ puis déterminer n pour que A soit premier.

2) Déterminer tous les entiers naturels a et b tels que : 7(a – 3) – 4(b – 11) = 0.

3) Soit le polynôme $P(x) = x^2 + x + 11$.

a)Vérifier que $P(x+1) = P(x) + 2(x+1)$ puis compléter le tableau ci-dessous.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$P(x)$										

b) Vérifier que tous les $P(x)$ obtenus sont des nombres premiers.

On dit qu'un entier naturel a est chanceux s'il est supérieur ou égal à 2 et si $x^2 + x + a$ est premier pour tout $x \in \{0, 1, 2, ..., a-2\}$.

4) Soit a un entier naturel et $P_a(x) = x^2 + x + a$.

a) Montrer que a divise $P_a(a)$ et divise $P_a(a-1)$.

b) Montrer que si a est chanceux alors a est premier.

c) Déterminer tous les nombres chanceux inférieurs ou égaux à 10 (expliquer).

EXERCICE 3 (4pts):

Soit f la fonction définie par : $f(x) = 2\cos^2 x - \sqrt{3}\sin 2x - 1$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1)a)Montrer que pour tout $x \in IR$ on a : $f(x) = 2\cos(2x + \frac{\pi}{3})$.

b) Montrer que f est périodique et préciser une période de f.

c) Etudier les variations de f sur $[0; \pi]$ puis tracer la courbe C_f de la restriction de f à $[-\pi; 2\pi]$.

2)a) Montrer que le point I d'abscisse $\frac{7\pi}{12}$ est un point d'inflexion de C_f.

b) Donner une équation de la tangente T à C_f au point I.

3) Soit g la fonction définie sur $[-\pi; \pi]$ par : $g(x) = 2\cos(2|x| + \frac{\pi}{3})$.

a) Montrer que g est paire puis tracer C_g à partir de C_f dans le même repère (expliquer).

b) Résoudre graphiquement dans $[-\pi;\pi]$, l'inéquation $g(x)\geq 1$.

EXERCICE4 (4pts):

Soit U la suite définie sur N par : $U_0=0 \;\; et \;\; U_{n+1}=\sqrt{1+\frac{1}{4}U_n^2}$.

1) Montrer que la suite U n'est ni arithmétique ni géométrique.

2)a)Monter par récurrence que $\forall \; n\in\mathbb{N}$; $0\leq U_n\leq \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

b) Montrer que la suite U est croissante.

3) Soit V la suite définie sur N par : $V_n=U_n^2-\frac{4}{3}$.

a) Montrer que V est une suite géométrique dont on précisera sa raison et son premier terme.

b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n et calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} V_n \;\; et \;\; \lim\limits_{x\to+\infty} U_n$.

c) Soit $S_n=\sum_{k=0}^{n}U_k^2$. Calculer S_n en fonction de n puis calculer sa limite.

4) Soit T la suite définie sur N par : $T_0=1 \;\; et \;\; T_{n+1}=\frac{1}{4}T_n+V_n$. On pose $H_n=4^n T_n$.

a) Montrer que H est une suite arithmétique de raison r = $-\frac{16}{3}$.

b) Exprimer H_n puis T_n en fonction de n.

EXERCICE 5 (5pts):

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\frac{x^2-x+2}{x-2}$ et ζ_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1)a)Vérifier que pour tout $x\in IR\setminus\{2\}$; $f(x)=x+1+\frac{4}{x-2}$.

b) En déduire que la droite $D: y=x+1$ est une asymptote oblique à la courbe ζ_f au $v(\pm\infty)$.

c) Etudier les variations de f puis tracer ζ_f .

d) Montrer que le point $\Omega(2;3)$ est un centre de symétrie de ζ_f .

2) Soit g la fonction définie par : $g(x)=\frac{x^2-7x+14}{2-x}$. Soit Δ la droite d'équation $x=2$ et S_Δ la symétrie orthogonal d'axe Δ.

a) Soit $M(x,y)$ un point du plan et $M'(x',y')$ son image par S_Δ. Montrer que $x'=4-x \;\; et \;\; y'=y$.

b) Montrer que la courbe ζ_g de g est l'image de ζ_f par S_Δ. Tracer alors ζ_g dans le même repère.

3) Soit h la fonction définie par : $h(x)=1+\sin^2(x)+\frac{4}{\sin^2(x)-2}$.

a) Déterminer le domaine de définition D_h de h et vérifier qu'elle est périodique de période π .

b) Montrer que pour tout $x\in D_h \;\; on\, a: h'(x)=\sin(2x)f'(\sin^2(x))$.

c) Etudier les variations de h sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ puis tracer la courbe ζ' de la restriction de h à $[-\pi;\pi]$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$.

d) Déterminer suivant le paramètre réel m le nombre de solution dans $[-\pi;\pi]$ de l'équation $h(x)=m$.

BON TRAVAIL