

<u>Lycée Houmet Souk</u>	<u>Devoir de Synthèse N : 2</u>	<u>3 Mathématique 2</u>
<u>Prof : Loukil Mohamed</u>	<u>Durée : 3 Heures</u>	<u>12 - 03 - 2016</u>

EXERCICE N : 1 (3.5 points)

Une urne contient **neuf** jetons , trois blancs numérotés 1 , 2 , 2 , quatre rouges numérotés 1 , 1 , 2 , 3 et deux noirs numérotés 1 , 1 .

1) On tire au hasard et **simultanément trois** jetons de l'urne .

Déterminer les cardinaux des ensembles suivants :

- a) **A** : Obtenir trois jetons de même couleur .
- b) **B** : Obtenir trois jetons portant des numéros pairs .
- c) **C** : Obtenir au moins un jeton blanc .
- d) **D** : Obtenir un seul jeton rouge et exactement deux jetons portant des numéros impairs .

2) On tire **successivement et sans remise quatre** jetons de l'urne .

Déterminer les cardinaux des ensembles suivants :

- a) **E** : Obtenir exactement deux jetons rouges .
- b) **F** : le premier jeton tiré est blanc .
- c) **G** : La somme des numéros obtenus est égal à 6 .

EXERCICE N : 2 (4 points)

On considère la suite réelle (U_n) définie sur \mathbb{N} par : $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = \frac{U_n}{\sqrt{1+U_n^2}}$.

1) a) Montrer que pour tout entier naturel n ; $U_{n+1} - 1 = \frac{-1}{(U_n + \sqrt{1+U_n^2})\sqrt{1+U_n^2}}$.

b) Montrer que pour tout entier naturel n ; $0 < U_n \leq 1$

c) Montrer que la suite (U_n) est décroissante sur \mathbb{N} .

d) En déduire que la suite (U_n) est convergente .

2) Soit la suite réelle (V_n) définie sur \mathbb{N} par : $V_n = \left(\frac{1}{U_n}\right)^2$.

a) Montrer que (V_n) est une suite arithmétique de raison $r = 1$.

b) Exprimer V_n en fonction de n .

c) Déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \sqrt{\frac{1}{1+n}}$ et déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, On pose : $S_n = \sum_{k=0}^n U_k$. Montrer que $\sqrt{n+1} \leq S_n$ puis déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

EXERCICE N : 3 (4 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On désigne par (\mathcal{C}) le cercle de centre O et de rayon 1 et par A et B les points d'affixes respectives :

$$a = \sqrt{3} + i \text{ et } b = 1 .$$

1) a) Donner la forme trigonométrique de a .

b) Construire le point A .

2) Soit C le point d'affixe $c = \frac{a-1}{1-a}$.

a) Sans écrire c sous forme cartésienne, vérifier que $c\bar{c} = 1$.

b) En déduire que le point C appartient au cercle (\mathcal{C}) .

c) Sans écrire c sous forme cartésienne, Montrer que $\frac{c-b}{a-b}$ est un réel .

d) Interpréter graphiquement le résultat précédent puis déduire la construction du point C .

3) a) Ecrire c sous forme cartésienne

b) Soit θ un argument du nombre complexe c . Montrer que : $\cos \theta = \frac{2\sqrt{3}-3}{5-2\sqrt{3}}$ et $\sin \theta = \frac{2-2\sqrt{3}}{5-2\sqrt{3}}$

EXERCICE N : 4 (4.5 points)

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{2x^2 - 7x + 8}{x - 2}$.

On désigne par $(\mathcal{C}f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\mathbf{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Dresser le tableau de variations de f .

b) Montrer que la droite $\Delta : y = 2x - 3$ est une asymptote oblique de $(\mathcal{C}f)$.

c) Construire $(\mathcal{C}f)$ dans le repère orthonormé \mathbf{R} .

2) On pose : $\Omega(2, 1)$, $\vec{I} = \vec{i} + 2\vec{j}$ et $M(x, y)$ dans le repère $\mathbf{R}'(\Omega, \vec{I}, \vec{j})$.

a) Prouver que : $M(x, y)$ est un point de $(\mathcal{C}f)$ si et seulement si $y = \frac{2}{x}$.

b) En déduire la nature de $(\mathcal{C}f)$ et ses caractéristiques dans le repère \mathbf{R}' .

3) Soit la fonction g définie par $g(x) = \frac{2x^2 - 4x - 3|x-1| + 5}{|x-1| - 1}$.

a) Montrer que la droite $D : x = 1$ est un axe de symétrie pour la courbe $(\mathcal{C}g)$ de g .

b) Expliquer comment peut-on obtenir $(\mathcal{C}g)$ à partir de $(\mathcal{C}f)$ puis tracer $(\mathcal{C}g)$.

EXERCICE N : 5 (4 points)

Dans le plan orienté dans le sens direct ,on considère un triangle équilatéral ABC tel que

$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})\equiv\frac{\pi}{3}(2\pi)$ et un point D du segment $[AB]$ distinct de A et B .

La parallèle à (AC) passant par D coupe (BC) en E et la parallèle à (BC) passant par D coupe (AC) en F .

1) Soit R la rotation de centre D et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

a) Déterminer $R(B)$ et $R(F)$. Justifier votre réponse.

b) En déduire que $AE = BF$ et $(\overrightarrow{AE};\overrightarrow{BF})\equiv\frac{2\pi}{3}(2\pi)$.

2) Soit G le centre de gravité du triangle ABC et R' la rotation de centre G et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

a) Déterminer $R'(A)$.

b) Montrer que $R'(E) = F$.

c) Montrer que les points G, E, C et F appartiennent à un même cercle.

3) Soit Δ la droite passant par B et parallèle à (AC) et r la rotation de centre B et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

a) Justifier que : $r = S_{(BC)} \circ S_{\Delta}$.

b) Pour tout point M du plan, on note : $M_1 = S_{\Delta}(M)$ et $M_2 = r(M)$.

Montrer que les points M_1 et M_2 sont symétriques par rapport à une droite fixe que l'on précisera

