FONCTION EXPONENTIELLE

Bac maths 2021/2022 (L .H .Tébourba)   Mr : L'AHBIBI Med

EXERCICE 1

Soit U la suite définie sur IN* par $U_1 = 1+\frac{1}{e}$ et $U_{n+1} = U_n.(1 + \frac{1}{e^{n+1}})$ pour $n\geq 1$.

1) Montrer que $\forall$ t > 0 on a : $1-\frac{t^2}{2} < ln(1+t) < t$.
2) Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = \ln(1 + e^{-x})$.
   Montrer que : $e^{-x} - \frac{e^{-2x}}{2} < f(x) < e^{-x}$.
3) Démontrer que la suite U est strictement croissante.
4) Démontrer par récurrence que $\forall n \in IN^*$ on a : $\ln(U_n) = f(1) + f(2) + ... + f(n)$.
5) On pose $a_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{e^k}$ et $b_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{e^{2k}}$.
   a. Montrer que $a_n - \frac{1}{2}b_n < \ln(U_n) < a_n$.
   b. Justifier que : $a_n = \frac{1-e^{-n}}{e-1}$, $\forall n \in IN^*$.
   c. En déduire que la suite U est majorée puis quelle et convergente. Soit α sa limite.
   Démontrer que : $\frac{2e+1}{2(e^2-1)} \leq \ln\alpha \leq \frac{1}{e-1}$, puis donner une valeur approchée à 0.1 prés de α.

EXERCICE 2

Partie A

Soit f la fonction définie sur IR_+ par $f(x) = \sqrt{1-e^{-x}}$.et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, i,j).

1) a. Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.interpréter graphiquement le résultat.
   b. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
   c. Vérifier que pour tout réel $x > \frac{1}{2}$ on a : $f'(x) < 1$, puis montrer que l'équation f (x) = x admet dans l'intervalle $[\frac{1}{2} ; +\infty[$ une unique solution α et que 0.7< α <0.8.
   d. tracer (C).

2) a .Montrer que f admet une fonction réciproque g définie sur un ensemble J que l'on précisera.

b. Démontrer que α est l'unique solution dans J de l'équation g(x) = x.

c. Expliciter g(x) pour x ∈ J.

Partie B

Pour tout entier naturel n non nul on pose : $\forall x \in J : F_n(x) = \int_0^{g(x)}(f(t))^n\,dt$. et $I_n = F_n(\alpha)$

1. montrer que pour tout x de J on a $F_2(x) = g(x) - x^2$.Exprimer alors I_2 en fonction de α .
2. a. Montrer que F_n est dérivable sur J et que pour tout x de J on a $F_n'(x) = \frac{2x^{n+1}}{1-x^2}$.

   b. Déterminer les réels a ; b et c tels que pour x distinct de 1 et −1 on a :

$$\frac{2x^2}{1-x^2} = a + \frac{b}{1-x} + \frac{c}{1+x}$$

   c. pour x ∈ J, expliciter $F_1(x)$.Expliciter alors I_1 en fonction de α.

d. Déterminer en fonction de α ,l'aire de la partie du plan limitée par (C),l'axe de abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \alpha$.

Partie C

1. a. Montrer que $F_{n+2}(x) - F_n(x) = \frac{-2}{n+2} x^{n+2}$.

   b. Déduire que $I_{n+2} - I_n = \frac{-2}{n+2} \alpha^{n+2}$.

2. Montrer que $\forall n \in IN^*$on a $I_{2n} = \alpha - \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha^{2k}}{k}$. et que $I_{2n+1} = \ln\frac{1+\alpha}{1-\alpha} - 2 \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^{2k+1}}{2k+1}$.

3. Montrer que $\forall n \in IN^*$on a $0 \leq I_n \leq \alpha^{n+1}$,en déduire les limites à l'infini de I_n,

   $S = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha^{2k}}{k}$ *et* $T = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^{2k+1}}{2k+1}$.

EXERCICE 3

Soit la fonction f_n définie sur IR par $\begin{cases} fn\,(x) = x\, e^{\frac{-n}{x}} \text{si } x \neq 0 \\ fn\,(0) = 0. \end{cases}$

On note (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. a) Montrer que f_n est continue à droite en 0.

   b) Montrer que f_n est dérivable à droite en 0 et donner la valeur du nombre dérivé à droite en 0 de f_n.

2. a) Montrer que f_n est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Pour tout réel x non nul, calculer $f_n'(x)$ puis étudier son signe.

   b) Calculer les limites de f_n en $+\infty$, $-\infty$ et 0^-, puis donner le tableau de variations de f_n.

3. a) Calculer : $I = \int_0^1 (1-t)\, e^{tx} dt$ *, puis* $J = \int_0^1 (1-t)^2 e^{tx} dt$

En déduire que : $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2}.J$.

b. montrer que pour x non nul $f_n(x) = x\text{-}n + g_n(x)$.

c. Calculer les limites de g_n en $+\infty$ *et en* $-\infty$. Déduire que (C_n) admet au voisinages de $+\infty$ et de $-\infty$ une asymptote D_n.

d. Etudier la position de (C_n) et (D_n) puis Donner l'allure de la courbe(C_1).

4) a. Montrer qu'il existe un unique réel, que l'on notera U_n, tel que $f_n(U_n) = 1$.

b. Vérifier que, pour tout n de $IN^\times$, (U_n) est strictement supérieur à 1 et que U_n est solution de l'équation : $x \ln(x) = n$.

c. Étudier la fonction h définie sur $[1, +\infty[$ par $h(x) = x \ln(x)$.

d. En déduire, en utilisant la fonction h^{-1}que $\lim\limits_{n\to\infty} Un=+\infty$.