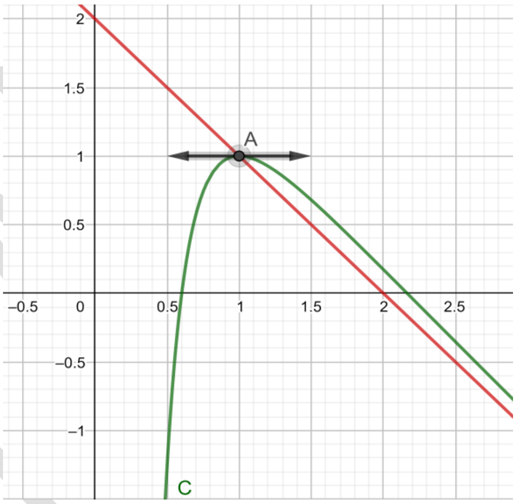
Lycée secondaire : Ibnou sina Menzel Bourguiba
Epreuve : **Mathématiques** (Devoir de synthèse N°2)
Prof : Béjaoui

Année scolaire :2021/2022
Classe : 4 sc 1
Durée : 3 hs

Exercice N° 1 : (4 pts)

Dans le graphique ci-contre on a tracé la courbe (C) de la fonction f définie sur] 0 , +∞ [par : $f(x) = a x + b + \frac{lnx}{x^2}$; (a , b ∈ IR).



La courbe (C) admet :

*Une asymptote oblique d'équation : y = - x +2 au voisinage de +∞ .

*Une asymptote verticale d'équation : x = 0.

*Une tangente horizontale au point A (1, 1).

1) Par une lecture graphique :

a) Dresser le tableau de variation de f .

b) Déterminer : f(1) , f '(1) , $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) + x$.

c) En déduire les valeurs de a et b.

2) Dans la suite on prend pour tout x ∈] 0 , +∞ [: $f(x) = 2 - x + \frac{lnx}{x^2}$ et $F(x) = \int_1^x \frac{lnt}{t^2}\, dt$.

a) Etudier les variations de F.

b) Soit $\lambda > 1$.Donner une interprétation géométrique de F(λ).

c) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que : $F(\lambda) = 1 - \frac{1 + ln\lambda}{\lambda}$,∀ $\lambda > 1$.

d) En déduire : $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} F(\lambda)$.

Exercice N° 2 : (3 pts) Soit la suite (a_n) définie sur IN par : $a_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\, dx$.

1) Calculer : $a_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\, dx$ et $a_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x}\, dx$.
2) Montrer que la suite (a_n) est décroissante.
3) Montrer que pour tout entier naturel n , on a: $0 \le a_n \le \frac{1}{n+1}$.
4) En déduire que la suite (a_n) est convergente puis calculer sa limite.

Exercice N°3 :(7 pts)

A) On considère la fonction f définie sur [0 , + ∞ [par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 2x^2 \ln x & si\ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O , $\vec{i}$, $\vec{j}$).

1) a) Montrer que f est continue à droite en 0.

b) Montrer que f est dérivable à droite en 0. Interpréter graphiquement le résultat.

2) a) Montrer que : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$.

b) Interpréter graphiquement le résultat obtenu .

3) a) Montrer que pour tout x ∈] 0 , + ∞ [,on a : $f'(x) = -4x\ln x$.

b) Dresser le tableau de variations de f.

4) a) Déterminer le deuxième point d'intersection autre que O de la courbe (C) et de l'axe (O , $\vec{i}$).

b) Tracer la courbe (C).

B)

Soit g la restriction de f sur [1 , +∞ [.

1) Montrer que g est une bijection de [1 , +∞ [sur un intervalle J que l'on précisera.

2) Etudier la dérivabilité de fonction g^{-1} à gauche en 1.

3) Tracer dans le même repère la courbe (C ') de g^{-1}.

C)

On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire en u.a , de la partie (E) du plan limitée par les courbes (C) , (C') et les axes (O , $\vec{i}$) et (O , $\vec{j}$).

1) Colorer (E) et justifier que : $\mathcal{A} = 1 + 2\int_1^{\sqrt{e}} f(x)\, dx$.
2) Montrer que : $\int_1^{\sqrt{e}} x^2 \ln x\, dx = \frac{2 + e\sqrt{e}}{18}$.
3) En déduire la valeur de A.

<u>Exercice N°4 : (6 pts)</u>

Le personnel d'un hôpital est réparti en trois catégories : les médecins, les soignants (non médecins) et les personnels TA (technique ou administratif).

12 % des personnels sont des médecins et 71 % sont des soignants .

67 % des médecins sont des hommes et 92 % des soignants sont des femmes.

On interroge au hasard un membre du personnel de cet hôpital. On considère les évènements suivants:

M :« le membre interrogé est un médecin ».

F :« le membre interrogé est une femme ».

S :« le membre interrogé est un soignant ».

1) Traduire les données de l'énoncé en utilisant les notations des probabilités.
2) Quelle est la probabilité d'interroger une femme soignante ?
3) Quelle est la probabilité d'interroger une femme médecin ?
4) On sait que 80 % du personnel et féminin.

   a) Calculer la probabilité d'interroger une femme TA.
   b) En déduire la probabilité d'interroger une femme sachant que la personne interrogée fait partie du personnel TA

Bon Travail