Lycée Bir Lahmar2 **Devoir de contrôle N°2** **12 Février 2022**	Epreuve **: Mathématiques** Durée **: 2 HEURES** Coefficient **:3**
4ème S-informatique	Enseignant **: Nemri Mohamed**

Exercice N°1 *(4points)*

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1) L'équation $33x + 11y = 2022$ admet des solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

2) Pour tout entier naturel n, $2^{2n} - 1$ est divisible par 3.

3) Soit a un entier relatif non nul. Si $a^3 \equiv 1[7]$ alors $a \equiv 1[7]$

4) Pour tout entier relatif a, on a $a^3 \equiv a[2]$.

Exercice N°2 *(6 points)*

Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} + \ln x$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) a)Calculer $\lim_{x\to 0^+} f(x)$, Interpréter graphiquement le résultat.

b) Calculer $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}$, Interpréter graphiquement le résultat.

2) a) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{x^2+1}{x}$

b) Dresser le tableau de variation de f .

c) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]0,+\infty[$ une unique solution α et que $0{,}5 < \alpha < 0.6$

3) a) Montrer que pour tout réel x∈ $]0,+\infty[$, $f''(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$

b) Montrer que le point G(1 ;1) est un point d'inflexion de la courbe (C)

c) Montrer que la droite $T : y = 2x - 1$ est la tangente à (C) au point G

4) Soit la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = f(x) - (2x - 1)$

a)Montrer que pour tout réel x∈ $]0,+\infty[$, $g'(x) = \frac{(x-1)^2}{x}$

b)Calculer g(1) et déterminer le signe de g sur $]0,+\infty[$

c) En déduire la position relative de T et (C)

5) Tracer T et (C)

Exercice N°3 *(4 points)*

Dans l'annexe jointe , on a représenté dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ la courbe (C) d'une fonction f définie , et dérivable sur IR .

On sait que la courbe (C) admet :

- ✓ l'axe des abscisses comme asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$.
- ✓ une seule tangente horizontale au point d'abscisse 0 .
- ✓ une branche parabolique de direction $(O,\vec{\jmath})$ au voisinage de $-\infty$.
- ✓ Le point (-1 ;0) est un point de la courbe.
- ✓ La tangente (T) à (C) au point $\left(\frac{5}{3},-1\right)$ passe par le point $\left(\frac{10}{3},0\right)$.

<u>En utilisant le graphique</u> :

1) Déterminer : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$.

2) Déterminer f (0) ; f '(0) et f '($\frac{5}{3}$) .

3) Montrer que la restriction g de f à l'intervalle $]0,+\infty[$ est une bijection de $]0,+\infty[$ un intervalle J que l'on déterminera .

On note g^{-1} la fonction réciproque de g.

4) La fonction g^{-1} est – elle dérivable à droite en (– 2) ? justifier la réponse .

5) Tracer dans l'annexe la courbe (C ') de la fonction g^{-1}

Exercice N°4 *(5 points)*

1)Montrer que $5^5 \equiv 1[11]$ et en déduire que $5^{2019} \equiv 9[11]$

On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $5x-3y=11$

2) a) Vérifier que (1,-2) est une solution de l'équation (E).

b) Résoudre alors (E).

3) Soit (a,b) une solution de (E) . On note d=PGCD(a,b)

Montrer que d=1 ou d=11

4) Soit $n = 3\times 16^{2019}+1$

a)Déterminer le reste de la division euclidienne de n par 11

b) Déterminer alors PGCD($3\times 16^{2019}+1$; $5\times 16^{2019}-2$).

Nom :…………………………………..prénom :……………………………………

Annexe

(à rendre avec la copie)