Devoir de contrôle N°2

Lycée M.HAYET 2021-2022 *Epreuve : math(2h)*

Niveau:4éme sci exp *prof:M.Haj taher*

EXERCICE 1:(9 pts)

f la fonction définie sur $]-1,3[$ *par :f(x)* $= \dfrac{x-1}{\sqrt{-x^2+2x+3}}$ *, On note C sa courbe réprésentative dans un repére orthonormé*

1-determiner $\lim_{x\to -1^+} f(x)$ *et* $\lim_{x\to 3^-} f(x)$ *, interpreter graphiquement le resultat . (0.5)*

2-Montrer que f est dérivable sur $]-1,3[$ *et vérifier que f ' (x)* $= \dfrac{4}{\sqrt{-x^2+2x+3}^3}$ *. (0.5)*

3-Dresser le tableau de variation de f . (0.5)

4-Ecrire l'équation de la tangente T au point A(1,0). (0.5)

5-construire la courbe de f dans un repère orthonormé . (0.5)

6-a-Montrer que f réalise une bijection de $]-1,3[$ *sur* $\mathbb{R}$ *. (0.5)*

b-Montrer que $f^{-1}(x) = 1 + \dfrac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$ *,pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *. (0.75)*

c-tracer la courbe de f^{-1} *dans le même repére . (0.5)*

d-Montrer que f^{-1} *est dérivable et calculer* $(f^{-1})'(x)$ *, pour tout x* $x \in \mathbb{R}$*. (0.75)*

7-a)On note g(x) $= f^{-1}(x)$*, Montrer que l'équation g(x)* $= x$ *admet une seule solution* α *dans l'intervalle* $]2,3[$ *. (0.5)*

b-Montrer que $0 \leq g'(x) \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ *,* $\forall x \in [1,+\infty[$*. (0.5)*

8-On définit la suite réelle (u_n) *par* $u_0 = 2$ *et* $u_{n+1} = g(u_n)$*.*

a-Montrer que $u_n \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}$ *. (0.75)*

b-Montrer que pour tout entier naturel n , $|u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2}|u_n - \alpha|$ *(0.75)*

c-Montrer que pour tout entier naturel n , $|u_n - \alpha| \leq (\dfrac{\sqrt{2}}{2})^n |u_0 - \alpha|$ *(0.75)*

d-En déduire que u_n *est convergente et déterminer sa limite. (0.75)*

EXERCICE 2:(5.5 pts)

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ *par f(x)* $= \dfrac{1}{1+x^2}$.

1-*Prouver l'existence d'une primitive F de f tel que F(0) = 0 .(0.5)*
2-Soit G la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ *par G(x)= F(tan(x)) .*
a-Montrer que G est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ *et déterminer G'(x).(0.75)*
a-En déduire que G(x) = x , $\forall x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$. *(0.75)*
c-Calculer F(1) , F($\dfrac{\sqrt{3}}{3}$*) et lim* $_{+\infty}$*F. (0.75)*
3-Dresser le tableau de variations de F.(0.75)

4-On pose H(x) = F($\dfrac{1}{x+1}$*)+ F(*$\dfrac{x}{x+2}$*) , pour tout x* ≥ 0
a-Montrer que H est dérivable sur $[0,+\infty[$ *et déterminar H' (x) .(0.75)*
b-Déduire l'expression de H(x). (0.5)
c-En déduire que F($\dfrac{1}{2}$*)+ F(*$\dfrac{1}{3}$*)=* $\dfrac{\pi}{4}$*.(0.75)*

EXERCICE 3:(5.5 pts)

Une usine fabrique en grande série des climatiseurs susceptibles de présenter deux défauts a et b .

Une étude statistique de la production conduit aux résultats suivants : 20 pour cent des climatiseurs présente le défaut a .

Parmi les climatiseurs pésente le défauts a , 10 pour cent présente le défaut b .

Parmi les climatiseurs ne pésentant pas le défauts a , 5 pour cent présente le défaut b .

On désigne par A = "le climatiseur présente le défaut a " et par B="le climatiseur présente le défaut b " .

a-Déterminer P(A) et P($\bar{A}$*). (0.5)*
b-Déterminer P(B/A) et P(B /$\bar{A}$*). (1)*
c-Répresenter l'arbre de probabilité puis detérminer les probabilités des évenements suivants:(1)

* *"le climatiseur présente le défaut a et le défaut b " .(0.75)*
* * *"le climatiseur ne présente aucun défaut " .(0.75)*
* ** *"le climatiseur présente le défaut b " .(1)*
**** *"le climatiseur présente le défaut a et ne présente pas le défaut b " .(0.5)*