L – Mateur	*Devoir de contrôle n°2*	*Classe : 4M2*
Prof : L.Amri	*19 / 02 / 2021*	*Durée : 2H*

***N.B** : Le sujet comporte (03) pages .*
Il sera tenu compte de la bonne rédaction et la présentation de la copie

Exercice n°1(6points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé R= $\left(O\ ;\vec{i}\ ;\vec{j}\right)$ (unité graphique 2cm)

Pour tout $x \in [0;1]$ On pose $f_n(x) = x^n\sqrt{1-x^2}$; $n \in IN$ et C_n la courbe de f_n dans R

1) Vérifier que la courbe représentative C_0 de f_0 est un quart de cercle à préciser **0.5**

2) Etudier f_1 et tracer C_0 et C_1 dans le même repère R (On précisant la tangente à C_1 en O) **1.25**

3) Calculer l'aire $\mathcal{H}$ en cm^2 de la partie limitée par les deux courbes C_0 et C_1 et les droites x=0 et x =1 **1**

4) On pose $\forall$ n $\in$ IN $\quad U_n = \int_0^1 f_n(x)dx$

a) Montrer que $\forall$ n $\in$ IN on a $0 \le U_n \le \dfrac{1}{n+1}$ **0.5**

b) Déterminer alors $\lim\limits_{x\to+\infty} U_n$ **0.5**

c) Montrer que $U_2 = \dfrac{1}{4}U_0$ **0.75**

d) Montrer que $\forall$ $n \ge 2$ on a $(n+2)U_n = (n-1)U_{n-2}$ **0.75**

e) En déduire que $U_{2n} = \dfrac{1\times3\times..............\times(2n-1)}{4\times6\times..................(2n+2)}\times\dfrac{\pi}{4}$; $\forall n \in IN^*$ **0.75**

Exercice n°2(6points)

Soit f la fonction définie sur $[0;1]$ par $f(x) = \dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}$

1) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter le résultat graphiquement **0.5**

2) Dresser le tableau de variation de f **0.5**

3) Montrer que f admet une fonction réciproque g définie sur $[0;1]$ 0.5

4) Tracer C_f et C_g dans un même repère orthonormé (Unité graphique 4cm) 1

5) Soit h la fonction définie sur $[0;1]$ par $h(x)=\int_1^x f(t)dt$ et soit H la fonction définie sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ par $H(x) = h(\tan^2 x)$

a) Montrer que H est dérivable sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ et calculer H'(x) 1

b) En déduire que $\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ $H(x) = 4\tan(x) - 4x + \pi - 4$ 1

c) Calculer alors $A = \int_0^1 \frac{2\sqrt{t}}{1+t}dt$ 0.5

d) Calculer l'aire $\mathscr{A}$ en unité d'aire du domaine limité par C_f et C_g 1

Exercice n° 3(3points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$ on considère les points M, M' et M''d'affixes respectives $Z = e^{i\theta}$, $Z' = (1-i)e^{i\theta}-i$ et $Z'' = (1+i)e^{i\theta} - i$

1) Montrer que l'ensemble des points M' lorsque $\theta \in [0;2\pi[$ est le cercle (C) de centre A(i) et de rayon $\sqrt{2}$ 0.75

2) a) Vérifier que Z'' = iZ'-1-i 0.5

b) Déduire l'ensemble des points M'' lorsque $\theta \in [0;2\pi[$ 0.75

3) Soit I le milieu de $[M'M'']$

a) Montrer que I est l'image de M par une translation que l'on déterminera 0.5

b) Déduire l'ensemble des point I lorsque $\theta \in [0;2\pi[$ 0.5

Exercice n° 4(5points)

On considère dans le plan orienté un triangle ABC isocèle en A et tel que $(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}) \equiv \theta[2\pi]$ avec $\theta \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$. On désigne par I le milieu de $[AB]$ et par J le milieu de $[AC]$

1) a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement g tel que g(A) = C et g(B) = A 1

b) Vérifier que g est une symétrie glissante et donner sa forme réduite 1

2) Soit Γ le cercle circonscrit au triangle ABC et soit O son centre. La droite (OI) coupe (BC) en D

a) Soit f le déplacement tel que f(A) = C et f(B) = A ; Vérifier que f est une rotation d'angle -2θ et déterminer son centre **1**

b) Déterminer f(I) **0.5**

3) Soit Δ la droite telle que f = $S_{(OA)} \circ S_{\Delta}$

a) En utilisant f(A) = C ; montrer que $\Delta = (OI)$ **0.5**

b) En déduire la construction de D' = f(D) puis montrer que D' $\in$ (OJ) **1**

4)) Caractériser $g^{-1} \circ f$ **1**

BON TRAVAIL