Les filtres

4ème S-I

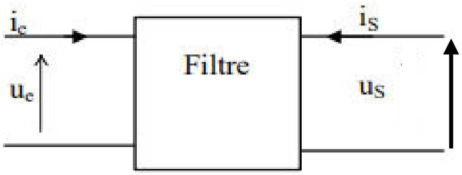
I/ Introduction

1-Définition d'un filtre

Un filtre est un circuit électronique (quadripôle) qui réalise une opération de traitement du signal. Autrement dit, il atténue certaines composantes d'un signal et en laisse passer d'autres.

Il existe plusieurs types de filtres, mais les filtres qui figurent dans le programme sont :

filtre passe-bas passif (RC)
filtre passe-bas actif (RC avec AOP)
filtre passe-haut (CR)
filtre passe-bande (R,L,C)



Schéma

u_e : tension d'entrée
u_s : tension de sortie
i_e : courant d'entrée
i_s : courant de sortie

2- Types de filtres

Voici la caractéristique des trois différents types de filtres :

***filtre passe-haut** : Il ne laisse passer que les fréquences au-dessus d'une fréquence déterminée, appelée "*fréquence de coupure*". Il atténue les autres (les basses fréquences). Autrement dit, il «laisse passer ce qui est haut». C'est un atténuateur de graves pour un signal audio. On pourrait aussi l'appeler coupe-bas.

***filtre passe-bas** : Il ne laisse passer que les fréquences au-dessous de sa *fréquence de coupure*. C'est un atténuateur d'aiguës pour un signal audio. On pourrait l'appeler coupe-haut.

***filtre passe-bande** : Il ne laisse passer qu'une certaine bande de fréquences et atténue tout ce qui est au-dessus ou en-dessous de cette bande. Il est très utilisé dans les récepteurs radio, tv… pour isoler le signal que l'on désire capter.

3- transmittance ou fonction de transfert

- La transmittance du filtre notée **T** tel que $T = \frac{U_{sm}}{U_{em}}$ (T est sans unité).

4- Le gain du filtre

Le gain lié à T par la relation $G=20\log(T)$ (**G** s'exprime en décibel (**dB**))

5-Bande passante et fréquence de coupure d'un filtre

La transmittance passe par un maximum T_{max} qui lui correspond un gain G_{max} .

Le filtre est passant (signal d'entrée transmis en sortie) lorsque sa transmittance est

$T \geq \frac{T_{max}}{\sqrt{2}}$ donc lorsque son gain $G \geq G_{max} - 3$ dB

Cette valeur de T ou de G est atteinte dans la cas d'un filtre passe bande pour deux fréquences N_1 et N_2 , appelées fréquences de coupure N_{Cb} et N_{Ch} (l'une haute l'autre basse) $T(N_c)= \frac{T_{max}}{\sqrt{2}}$

On appelle bande passante du filtre passe bande l'intervalle de fréquences $[N_1 , N_2]$ pour lequel on a $T \geq \frac{T_{max}}{\sqrt{2}}$ et $G \geq G_{max} - 3$ dB

La largeur de la bande passante est donnée par la différence $N_2 - N_1$ des fréquences de coupures. ($N_2 > N_1$)

Plus la bande passante est étroite plus le filtre est dit sélectif

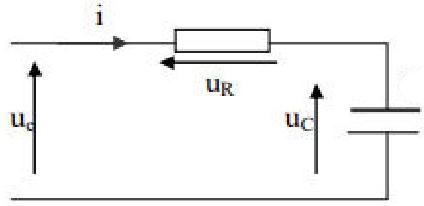
Dans le cas d'un filtre passe bas $T \geq \frac{T_{max}}{\sqrt{2}}$ pour $N \leq N_C$

Dans le cas d'un filtre passe haut $T \geq \frac{T_{max}}{\sqrt{2}}$ pour $N \geq N_C$

Professeur M[r] Kamel Bel Asri

II/ Etude de quelque filtres

1-Filtre passe-bas passif



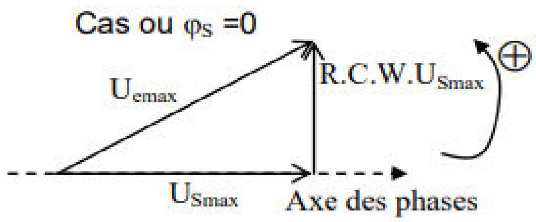
a- Equation différentielle

$RC.\frac{du_s}{dt} + u_s = u_e = U_{emax}.\sin(wt+\varphi_e)$

Solution de l'équation : $u_s = U_{smax}.\sin(wt+\varphi_s)$

b- Expression de u_{Smax}

A partir de la représentation de Fresnel



$\frac{du_s}{dt}$ est en avance de phase de $\frac{\pi}{2}$ sur u_s

u_e est toujours en avance de phase sur u_s

$U_{Smax} = \frac{U_{emax}}{\sqrt{1+(R.C.W)^2}}$ avec $w = 2\pi N$

$tg(\varphi_e - \varphi_s) = R.C.W = 2\pi N.R.C$

c- La transmittance du filtre

$T = \frac{U_{sm}}{U_{em}} = \frac{1}{\sqrt{1+(R.C.W)^2}}$ La valeur maximale de cette transmittance est $T_{max} = 1$

Ceci est lorsque w tend vers zéro c'est pourquoi il est dit filtre passe bas.

d- Le gain du filtre

$G = 20\log(T) = 20.\log\left(\frac{1}{\sqrt{1+(R.C.W)^2}}\right) = -10.\log(1+(R.C.W)^2)$ et le gain maximal est $G_{max} = 0$ dB

e- La fréquence de coupure N_C.

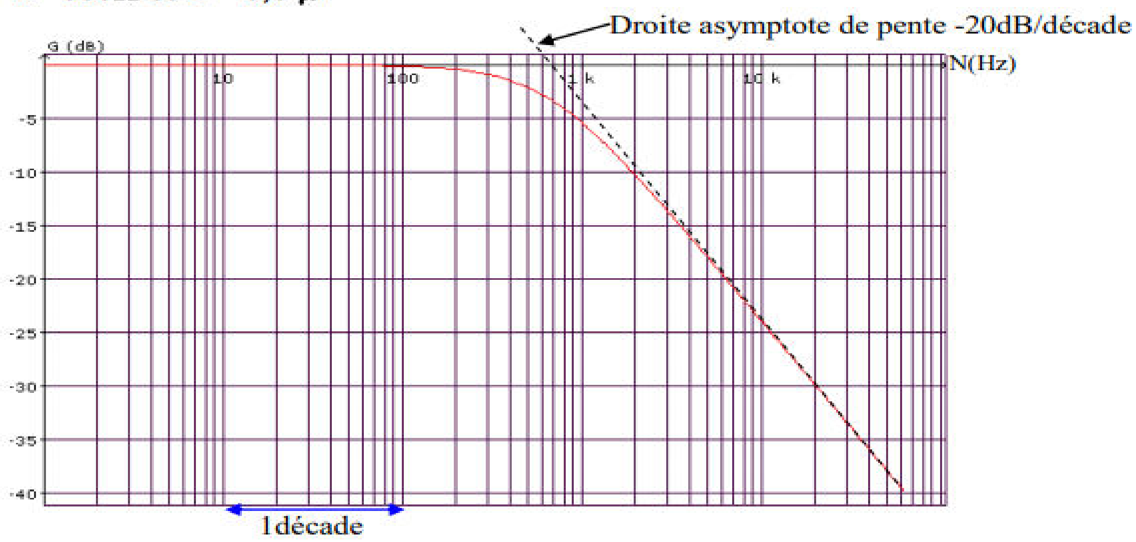
Lorsque la fréquence de la tension d'entrée est $N = N_C$, la transmittance de ce filtre est $T(N_c) = \frac{T_{max}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow G = G_{max} - 3$ dB. On trouve $\frac{1}{\sqrt{1+(R.C.2.\pi.N_c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow N_C = \frac{1}{2.\pi.R.C}$

Remarque : Lorsque $N = N_C$, on a $tg(\varphi_e - \varphi_s) = 2\pi N_C.R.C = 1 \Rightarrow (\varphi_e - \varphi_s) = \frac{\pi}{4}$ et $U_{Smax} = \frac{U_{emax}}{\sqrt{2}}$

On peut déterminer graphiquement la fréquence de coupure en traçant la droite asymptote à la courbe du gain. L'intersection de cette droite avec l'axe de fréquence nous donne la fréquence de coupure du filtre

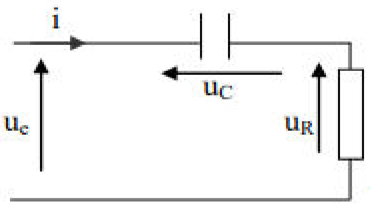
Exemple : de courbe du gain d'un filtre passe bas passif
R =500Ω et C = 0,5 µF

Exemple : de courbe du gain d'un filtre passe bas passif
R =500Ω et C = 0,5 µF



Professeur M^r Kamel Bel Asri

3-Filtre passe-haut



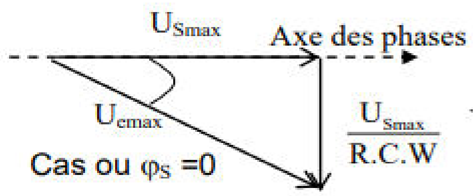
a- Equation différentielle

$$u_s + \frac{1}{RC}\cdot\int u_s dt = u_e = U_{emax}.\sin(wt+\varphi_e)$$

Solution de l'équation : $u_s = U_{smax}.\sin(wt+\varphi_s)$

b- Expression de u_{Smax}

A partir de la représentation de Fresnel



$\int u_s dt$ est en retard de phase de $\frac{\pi}{2}$ sur u_s

u_e est toujours en retard de phase sur u_s

$$U_{Smax} = \frac{U_{emax}}{\sqrt{1+(\frac{1}{R.C.W})^2}} \text{ avec } w = 2\pi N$$

$$tg(\varphi_s - \varphi_e) = \frac{1}{R.C.W} = \frac{1}{2.\pi.R.C.N}$$

c- La transmittance du filtre

$$T = \frac{U_{sm}}{U_{em}} = \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{1}{R.C.W})^2}}$$ La valeur maximale de cette transmittance est $T_{max} = 1$

Ceci est lorsque w est très grande c'est pourquoi il est dit filtre passe haut

d- Le gain du filtre

$$G=20\log(T) = 20.\log\left(\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{1}{R.C.W})^2}}\right) = -10.\log\left(1+(\frac{1}{R.C.W})^2\right)$$ et le gain maximal est G_{max}= 0 dB

e- La fréquence de coupure N_C.

Lorsque la fréquence de la tension d'entrée est $N = N_C$, la transmittance de ce filtre est

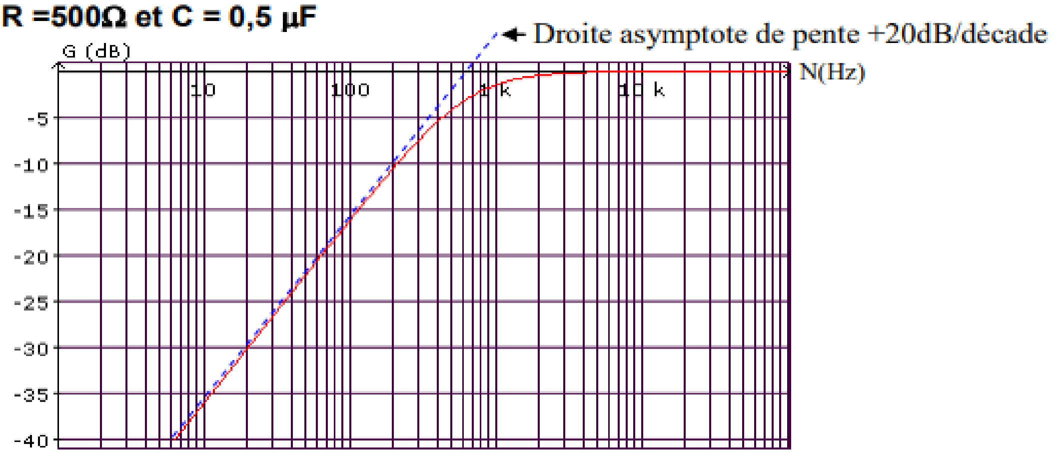
$$T(N_c)= \frac{T_{max}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow G = G_{max} - 3 \text{ dB. On trouve } \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{R.C.2.\pi.N_C}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow N_C = \frac{1}{2.\pi.R.C}$$

Remarque : Lorsque $N = N_C$, on a $tg(\varphi_s - \varphi_e) = \frac{1}{2.\pi.R.C.N_C} = 1 \Rightarrow (\varphi_s - \varphi_e) = \frac{\pi}{4}$ et $U_{Smax} = \frac{U_{emax}}{\sqrt{2}}$

On peut déterminer graphiquement la fréquence de coupure en traçant la droite asymptote(oblique) à la courbe du gain. L'intersection de cette droite avec l'axe de fréquence nous donne la fréquence de coupure du filtre

Exemple : de courbe du gain d'un filtre passe haut

R =500Ω et C = 0,5 µF

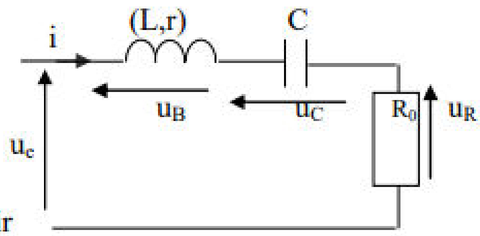


Professeur M[r] Kamel Bel Asri

1-Filtre passe- bande

a- Equation différentielle

$$\frac{L}{R_0}\frac{du_s}{dt}+\left(1+\frac{r}{R_0}\right)\cdot u_s+\frac{1}{R_0C}\cdot\int u_s dt = u_e = U_{emax}.\sin(wt+\varphi_e)$$



Solution de l'équation : $u_s = U_{smax}.\sin(wt+\varphi_s)$

b- Expression de u_{Smax}

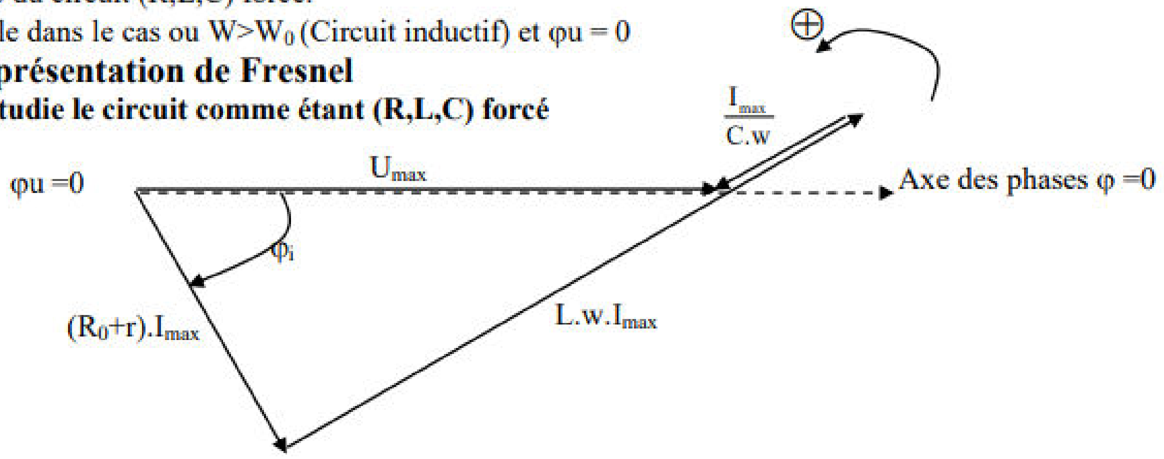
A partir de la représentation de Fresnel

On peut déduire la représentation de Fresnel relative au filtre à partir de celle du circuit (R,L,C) forcé.

Exemple dans le cas ou $W>W_0$ (Circuit inductif) et $\varphi u = 0$

La représentation de Fresnel

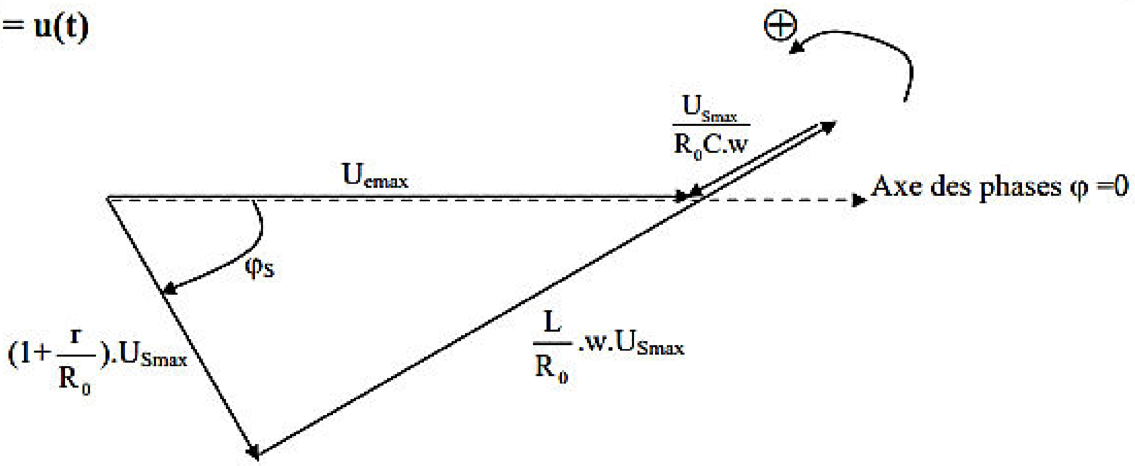
Si on étudie le circuit comme étant (R,L,C) forcé



$$I_{max} = \frac{U_{max}}{\sqrt{(R_0+r)^2+(Lw-\frac{1}{Cw})^2}} \text{ et } U_{Rmax} = = R_0.Imax = \frac{R_0.U_{max}}{Z} = \frac{R_0.U_{max}}{\sqrt{(R_0+r)^2+(Lw-\frac{1}{Cw})^2}}$$

Si on étudie le circuit (R,L,C)comme étant un filtre ou $u_s = u_R$ ($U_{smax} = R_0.Imax \Rightarrow Imax = \frac{u_{smax}}{R_0}$)

$u_e(t) = u(t)$



$$U_{Smax} = \frac{R_0.U_{emax}}{\sqrt{(R_0+r)^2+(Lw-\frac{1}{Cw})^2}}$$

c- La transmittance du filtre

$$T = \frac{U_{sm}}{U_{em}} = \frac{R_0}{\sqrt{(R_0+r)^2 + (Lw - \frac{1}{Cw})^2}}$$ La valeur maximale de cette transmittance est $\mathbf{T_{max} \leq 1}$

d- Le gain du filtre

$G=20\log(T) = 20.\log\left(\frac{R_0}{\sqrt{(R_0+r)^2 + (Lw - \frac{1}{Cw})^2}}\right)$ et le gain maximal est $G_{max} \leq 0$ dB

e- La bande passante du filtre

La transmittance passe par un maximum T_{max} qui lui correspond un gain G_{max} .

Le filtre est passant (signal d'entrée transmis en sortie) lorsque sa transmittance est $T \geq \frac{T_{max}}{\sqrt{2}}$ donc lorsque son gain $G \geq G_{max} - 3$ dB

Cette valeur de T ou de G est atteinte dans la cas d'un filtre passe bande pour deux fréquences N_1 et N_2 , appelées fréquences de coupure N_{Cb} et N_{Ch} (l'une haute l'autre basse) $T(N_c)= \frac{T_{max}}{\sqrt{2}}$

On appelle bande passante du filtre passe bande l'intervalle de fréquences $[N_1 , N_2]$ pour lequel on a $T \geq \frac{T_{max}}{\sqrt{2}}$ et $G \geq G_{max} - 3$ dB

La largeur de la bande passante est donnée par la différence $N_2 - N_1$ des fréquences de coupures. ($N_2 > N_1$)

On a

$$N_2 - N_1 = \frac{(R_0+r)}{2.\pi.L}$$

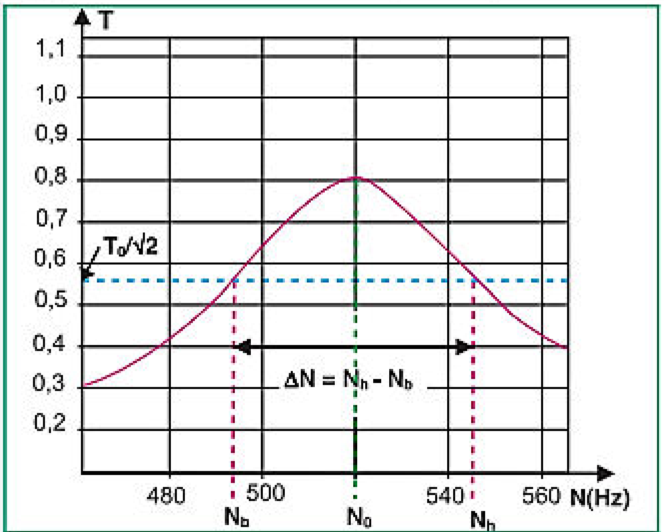


Fig. 29 : Courbe de réponse T = f(N)

Expression du gain

On a : G = 20 logT.

Donc, $G = 20 \log \dfrac{T_o}{\sqrt{1+Q^2\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2}}$.

Comme la transmittance, le gain est maximum à $N = N_o$:

$$G_o = 20 \log T_o.$$

$T_o \leq 1$. Donc, $G_o \leq 0$.

Il s'en suit : $G \leq 0 \; \forall N$.

La bande passante à (-3 dB) est telle que $G \geq (G_o - 3 \text{ dB})$,

ce qui signifie :

$$20 \log \frac{T_o}{\sqrt{1+Q^2\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2}} \geq 20 \log T_o - 3,$$

d'où : $\log\left[1+Q^2\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2\right] \leq \dfrac{3}{10}$,

ce qui permet d'aboutir à : $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2 \leq \dfrac{1}{Q^2}$.

Il s'en suit : $-\dfrac{1}{Q} \leq x - \dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{Q}$.

La résolution de l'inéquation $\left(-\dfrac{1}{Q} \leq x - \dfrac{1}{x}\right)$ qui s'écrit :

$x^2 + \dfrac{x}{Q} - 1 \geq 0$ donne $x \geq \dfrac{1}{2Q}\left[-1 + \sqrt{1+4Q^2}\right]$

La résolution de l'inéquation $\left(x - \dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{Q}\right)$ qui s'écrit :

$x^2 - \dfrac{x}{Q} - 1 \leq 0$ donne $x \leq \dfrac{1}{2Q}\left[1 + \sqrt{1+4Q^2}\right]$

On a ainsi : $x_b \leq x \leq x_h$ avec :

$$x_b = \frac{1}{2Q}\left[-1 + \sqrt{1+4Q^2}\right] \text{ et } x_h = \frac{1}{2Q}\left[1 + \sqrt{1+4Q^2}\right]$$

$x = \dfrac{N}{N_o}$. On a alors : $N_o x_b \leq N \leq N_o x_h$, ce qui revient à écrire $N_b \leq N \leq N_h$, avec :

$N_b = \dfrac{N_o}{2Q}\left[-1 + \sqrt{1+4Q^2}\right]$: fréquence de coupure basse,

$N_h = \dfrac{N_o}{2Q}\left[+1 + \sqrt{1+4Q^2}\right]$: fréquence de coupure haute.

Professeur M^r Kamel Bel Asri

Un filtre RLC passe-bande est caractérisé par :

- une transmittance $T = \dfrac{T_0}{\sqrt{1+Q^2\left(\dfrac{N}{N_0}-\dfrac{N_0}{N}\right)^2}}$ avec $T_0 = \dfrac{R}{R+r}$ et r la r résistance de la bobine,

- une fréquence propre: $N_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$,

- une fréquence de coupure basse: $N_b = \dfrac{N_0}{2Q}\left[-1+\sqrt{1+4Q^2}\right]$,

- une fréquence de coupure haute: $N_h = \dfrac{N_0}{2Q}\left[1+\sqrt{1+4Q^2}\right]$.

Dans ces expressions, Q est le facteur de surtension du circuit.

La transmittance T du filtre est maximale pour $N = N_0$ et a pour expression : $T_0 = \dfrac{R}{R+r}$.

Par conséquent $T \leq 1$ pour toute valeur de N. Ainsi, le filtre RLC passe-bande est généralement un atténuateur de tension.

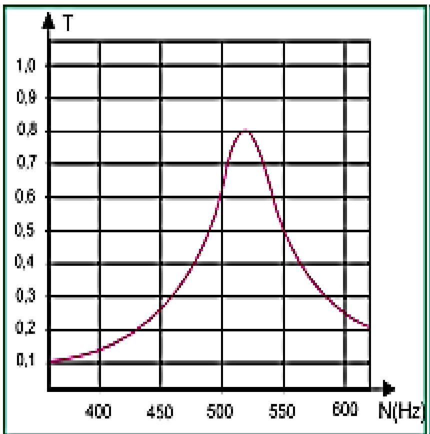


Fig.30a : T= f(N) pour R_1 = 50 Ω

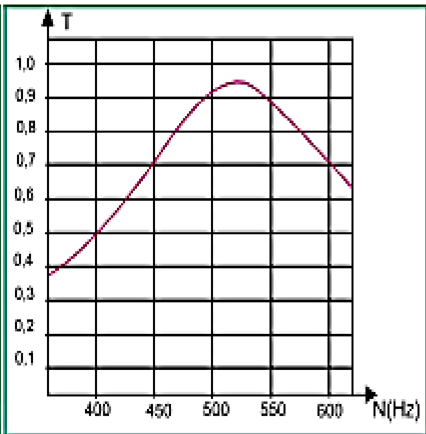


Fig.30b : T= f(N) pour R_2 = 200 Ω

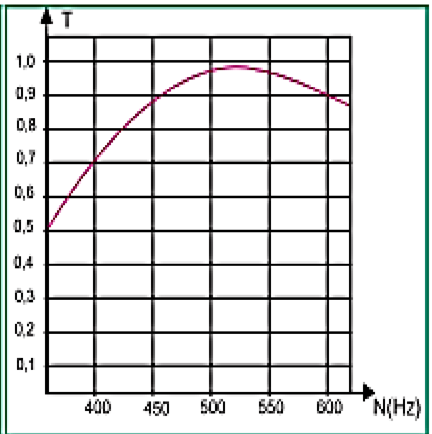


Fig.30c : T= f(N) pour R_3 = 800 Ω

$$\boxed{\Delta N = N_h - N_b = \frac{N_o}{Q}}$$

$$-\frac{\pi}{2}\ \text{rad} < \varphi_S - \varphi_E < \frac{\pi}{2}\ \text{rad},\ \forall N$$