Institut : Mahmoud Al-Masaadi Bardo	Chapitre : Trigonométrie et Mesure de grandeurs	Prof : Ayadi Mondher 2 ème sciences 2 ème technologie de l'informatique

I. Rappel :

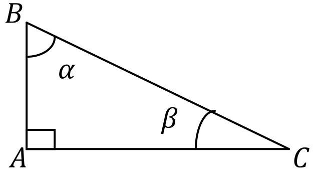
Rapports trigonométriques dans le triangle rectangle :

Soit ABC un triangle rectangle en A, soient $A\hat{B}C = \alpha$ *et* $A\hat{C}B = \beta$

$\cos\alpha = \frac{AB}{BC}$, $\sin\alpha = \frac{AC}{BC}$ et $\tan\alpha = \frac{AC}{AB}$

$\cos\beta = \frac{AC}{BC}$, $\sin\beta = \frac{AB}{BC}$ et $\tan\beta = \frac{AB}{AC}$

On remarque $\cos\alpha = \sin\beta$ *et* $\sin\alpha = \cos\beta$



α *et* β *sont deux angles complémentaires* ($\alpha + \beta = 90°$)

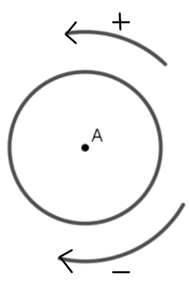
II. Cercle trigonométrique et mesure d'angle :

1) Cercle trigonométrique et le radian :

Définition

On appelle cercle trigonométrique le cercle $\mathcal{C}$ *de centre O et de rayon 1 sur lequel on distinguera deux sens de parcours :*

- *Sens direct (sens inverse des aiguilles d'une montre)*
- *Sens indirect (sens des aiguilles d'une montre)*



a) Longueur d'un arc de cercle :

La longueur d'un cercle de rayon r est $2\pi r$ *or le cercle trigonométrique a pour rayon* $r = 1$, *donc sa longueur est* 2π.

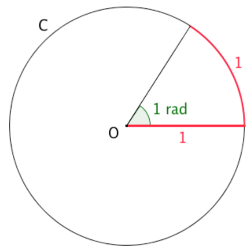
Son demi-cercle a donc pour longueur π *et son quart de cercle a pour longueur* $\frac{\pi}{2}$.

Le cercle trigonométrique permit d'introduire une nouvelle unité de mesure d'angles s'appelle radian

b) Le radian :

Définition

Soit $\mathcal{C}$ *le cercle trigonométrique de centre O dans un repère (O, I, J)*
Le radian (symbole : rad) est la mesure d'un angle au centre qui intercepte sur le cercle $\mathcal{C}$ *un arc de longueur 1.*



La longueur d'un arc de cercle et la mesure en degré de l'angle au centre qui l'intercepte sont proportionnelles.

En effet, nous savons que la relation suivante est vérifiée : 360° degré équivaut à 2π *rad (la longueur du cercle trigonométrique)*

Pour déterminer la mesure d'un angle en radian on utilise le tableau suivant :

degrés	360°	d
radian	2π	r

Ce tableau nous donne la relation suivante $r = \frac{2\pi \times d}{360°}$ *qui permit de convertir des degrés en radian.*

Exercice :

Terminer le tableau suivant :

Angle α en degrés	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
Angle α en radians							
Angle α en degrés	105°	120°	135°	150°	165°	180°	360°
Angle α en radians							

III. Cosinus et sinus d'un réel :

Nous s'intéressons au demi-cercle trigonométrique 'est à dire $\alpha \in [0,\ \pi]$

1) Cosinus et sinus et demi-cercle trigonométrique :

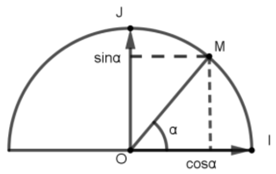
Définition :

Soit $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ un repère orthonormé du plan.

Soit $\alpha \in [0,\ \pi]$ et $\mathcal{C}$ est le demi-cercle trigonométrique tel que $M \in \mathcal{C}$ et $I\hat{O}M = \alpha$

Alors l'abscisse de point M est $\cos\alpha$ et son ordonnée est $\sin\alpha$ donc

$M(\cos\alpha , \sin\alpha)$



Exercice :

Compléter le tableau :

Angle α en degrés	0°	30°	45°	60°	90°
Angle α en radians	0	$\frac{\pi}{6}$			
Cos α					
Sin α					

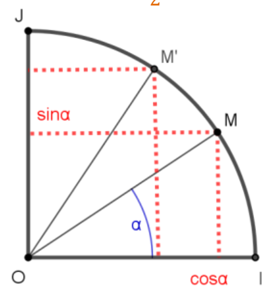
2) Angles complémentaires :

Définition :

Soient α et β deux angles complémentaires signifie $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ alors $\beta = \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ ainsi ona :

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$ avec $\alpha \in \left[0 , \frac{\pi}{2}\right]$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$ avec $\alpha \in \left[0 , \frac{\pi}{2}\right]$



Exercice :

Sans utiliser la calculatrice calculer :

$\cos\frac{\pi}{8} + \cos\frac{3\pi}{8} - \sin\frac{\pi}{8} - \sin\frac{3\pi}{8}$

$\cos\frac{\pi}{10} + \cos\frac{\pi}{5} - \sin\frac{2\pi}{5} - \sin\frac{3\pi}{10}$

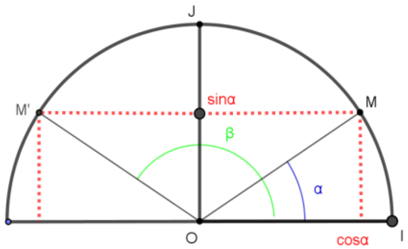
3) Angles supplémentaires :

Définition :

Soient α et β deux angles supplémentaires signifie $\alpha + \beta = \pi$ alors $\beta = (\pi - \alpha)$ ainsi on a :

$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$ avec $\alpha \in [0\,,\,\pi]$

$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$ avec $\alpha \in [0\,,\,\pi]$



Exercice :

Sans utiliser la calculatrice calculer :

$$\cos\frac{\pi}{8} + \cos\frac{3\pi}{8} + \cos\frac{5\pi}{8} + \cos\frac{7\pi}{8}$$

$$\sin\frac{2\pi}{5} + \sin\frac{\pi}{10} - \sin\frac{3\pi}{5} - \sin\frac{9\pi}{10}$$

4) Tangente et cotangente :

Définition :

- Soit α un réel appartient à l'intervalle $[0\,,\,\pi]$ et tel que $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$

  On appelle tangente du réel α le réel noté $\tan\alpha$ et défini par $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
- Soit α un réel appartient à l'intervalle $[0\,,\,\pi]$ et tel que $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq \pi$

  On appelle cotangente du réel α le réel noté $\cot g\,\alpha$ et défini par $\cot g\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

Remarque :

Pour $\alpha \in [0\,,\,\pi]$ on a $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$ et $0 \leq \sin\alpha \leq 1$

5) Relations fondamentales :

Soit $\alpha \in [0\,,\pi]$

a) $\tan\alpha = tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ avec $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$

b) $\cot\alpha = \cot g\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ avec $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq \pi$

c) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

d) $1 + tg^2\,\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ avec $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$

e) $1 + \cot g^2\,\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$ avec $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq \pi$

Remarque :

Soit $\alpha \in [0\,,\frac{\pi}{2}]$

- ✓ $tg\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot g\,\alpha$ avec $\alpha \in \left]0\,,\frac{\pi}{2}\right]$
- ✓ $\cot g\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = tg\,\alpha$ avec $\alpha \in \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$

Soit $\alpha \in [0\,,\pi]$

- ✓ $tg\,(\pi - \alpha) = -tg\,\alpha$ avec $\alpha \in [0\,,\pi] \backslash \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$
- ✓ $\cot g\,(\pi - \alpha) = -\cot g\,\alpha$ avec $\alpha \in]0\,,\pi[$

6) Comparaison des images des réels α et $\frac{\pi}{2} + \alpha$ par les fonctions circulaires :

Définition :

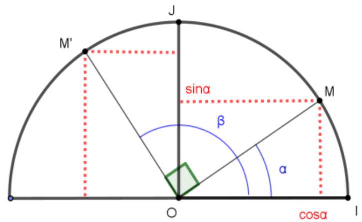
Pour $\alpha \in [0\,,\frac{\pi}{2}]$ on a :

$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha$ avec $\alpha \in \left[0\,,\,\frac{\pi}{2}\right]$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha$ avec $\alpha \in \left[0\,,\,\frac{\pi}{2}\right]$

$tg\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot g\,\alpha$ avec $\alpha \in \left]0\,,\frac{\pi}{2}\right]$

$\cot g\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -tg\,\alpha$ avec $\alpha \in \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$



Exercice :

1) Calculer les valeurs de $tg\frac{2\pi}{3}$; $tg\frac{3\pi}{4}$; $tg\frac{5\pi}{6}$
2) Calculer sans calculatrice :

$$tg\frac{\pi}{7} + tg\frac{2\pi}{7} + tg\frac{3\pi}{7} + tg\frac{4\pi}{7} + tg\frac{5\pi}{7} + tg\frac{6\pi}{7}$$

Exercice : (activité 16 page 77)

7) Construction d'un angle connaissant l'un de ses rapports trigonométriques :

Activité :

1) Construire un angle $x\hat{O}y$ sachant que $\cos x\hat{O}y = \frac{4}{5}$.
2) Construire un angle $M\hat{O}N$ sachant que $\sin M\hat{O}N = 0{,}35$.
3) Construire un angle α sachant que $\cos \alpha = 0{,}25$.

8) Loi du sinus :

Activité : (activité 20 page 78)

Propriété :

Si ABC un triangle tel que a=BC ; b=AC et c=AB alors :

$$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}}$$

9) Théorème d'El-Kashi :

Activité : (activité 28 page 80)

Théorème : Théorème d'El-Kashi

Soit ABC un triangle tel que a=BC ; b=AC et c=AB alors :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,.\cos\hat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\,.\cos\hat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\,.\cos\hat{C}$$

10) Relations métriques dans un triangle rectangle :

ABC est un triangle rectangle en A et H le pied de la hauteur issue de A.

- $AB \times AC = AH \times BC$
- $AB^2 + AC^2 = BC^2$
- $BH \times CH = AH^2$
- $BC \times BH = AB^2$
- $BC \times CH = AC^2$