Institut : Mahmoud Al-Masaadi Bardo	Chapitre : Notion De Polynômes	Prof : Ayadi Mondher 2 ème sciences 2 ème technologie de l'informatique

I. Pour démarrer

1) *Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes :*

$A(x) = (x-1)(3x^2-5x-1)$; $B(x) = (3+x)^2(x^2-x-3)$;
$C(x) = (3x-2)^2$

2) *Soit* $f(x) = 6x^3 - 7x^2 - 5x + 1$ *et* $g(x) = (2x-3)(3x^2+x-1) - 2$

a) *Calculer f(0) et g(0) ; f(-1) et g(-1) ; f(-3) et g(-3)*

b) *A-t-on* $f(x) = g(x)$ *, pour tout réel x ?*

II. Fonction polynômes :

1) Définition et remarque :

Définition 1

Soient a_0, a_1, ……., a_{n-1} *et* a_n *des réels.*
La fonction f définie par $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots\dots\dots + a_1x + a_0$ *est appelée fonction polynôme.*
Les réels a_0, a_1, ……., a_{n-1}, a_n *sont appelés les coefficients de la fonction polynôme.*

Remarque

Au lieu de dire « la fonction polynôme f définie sur $\mathbb{R}$ *par :*
$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots\dots\dots + a_1x + a_0$ *», on dit souvent « le polynôme f est définie par :* $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots\dots\dots + a_1x + a_0$ *»*

2) Egalité de deux fonctions polynômes

Activité 1:

1) *on considère le polynôme f définie par :* $f(x) = x^2 - 5x + 6$

a) *Calculer :*

f(2)=………………………………………………………………………

f(3)=………………………………………………………………………

b) *Le polynôme f est-il nulle ?*

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

2) *Soit g le polynôme définie par* $g(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$
Montrer que ($g(x) = 0$ *, pour tout réel x) équivaut à (*$a_2 = a_1 = a_0 = 0$ *)*
On utilise la résolution d'un système de deux équations à deux inconnues par la méthode de substitution et d'élimination.

3) *Soit* $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots\dots\dots + a_1x + a_0$ *un polynôme tel que* $P(x) = 0$ *, pour tout réel x .Quelle conjecture peut-on émettre sur les coefficients de ce polynôme.*

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

Définition 2

tout polynôme nul de la forme
$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots\dots\dots + a_1x + a_0 = 0$
équivaut à $a_n = a_{n-1} = \dots\dots\dots = a_1 = a_0 = 0$

4) *Soit* $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots\dots\dots + a_1x + a_0$
et $Q(x) = b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots\dots\dots bx + b_0$ *deux polynômes tels que* $P(x) = Q(x)$ *, pour tout réel x .Que peut-on dire de* a_n *et* b_n ,
a_{n-1} *et* b_{n-1} , a_1 *et* b_1 , a_0 *et* b_0

Définition 3

On admet que tout polynôme non nul a une écriture unique de la forme
$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots\dots\dots + a_1x + a_0$ *, avec* $a_n \neq 0$
L'entier n est appelé le degré du polynôme P, on écrit d°(P)=n.
On convient que le polynôme nul n'a pas de degré.

Vocabulaire :

Soit $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots\dots\dots + a_1x + a_0$ *, avec* $a_n \neq 0$

- a_0 *s'appelle le terme constant.*
- a_1x *s'appelle le terme de premier degré ou le terme en x .*
- a_nx^n *s'appelle le terme de degré n ou le terme en* x^n *ou le terme de plus haut degré.*
- *Chacun des termes* a_0, a_1x, ……., $a_{n-1}x^{n-1}$ *et* a_nx^n *est appelé monôme.*

Remarque

- ✓ Tout polynôme de premier degré est appelé binôme ou binôme du premier degré.
- ✓ Tout polynôme du seconde degré est appelé trinôme ou trinôme de second degré.

Exercice :

a) Déterminer parmi les fonctions ci-dessous celles qui sont des polynômes.

$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$x\to -2x^3-5x^2-1$

………………………………………

$G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$z\to 2z^5-3z^3+z^2+\sqrt{z}$

………………………………………

$H:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$t\to 1+3t+\frac{2}{3}t^2-6t^3$

………………………………………

$P:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$y\to\sqrt{3}\,y^3+y^2-\frac{1}{y}-2$

………………………………………

b) Déterminer le degré de chacun des polynômes ci-dessous.

$P(x)=3x^4-7x^2+x$ $\qquad d°(P)=$ ….

$Q(x)=2-x+x^3+x^5+x^7$ $\qquad d°(Q)=$ ….

$S(x)=(2x+1)(2x^3+8x-1)$ $\qquad d°(S)=$ ….

$K(x)=(x-1)^3-x^3$ $\qquad d°(K)=$ ….

3) Opérations su les fonctions polynômes

Définition 3

Soit f et g deux polynômes et α un réel.

- On appelle somme de f et g le polynôme noté f+g et défini pour tout réel x par $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$
- On appelle produit de polynôme f par le réel α le polynôme noté αf et définie pour tout réel x par $(\alpha f)(x)=\alpha f(x)$.
- On appelle produit des polynômes f et g le polynôme $f.g$ et définie pour tout réel x par $(f.g)(x)=f(x).g(x)$

Exercice :

Réduire et ordonner les polynômes P+Q , 3P-2Q et P.Q dans chacun des cas suivants et préciser le degré de chaque polynôme obtenu.

a) $P(x)=2x^3-x^2+2x-1$; $Q(x)=3x^3-x$

b) $P(x)=(2x+1)^2$; $Q(x)=(x-2)(x^3+1)$

4) Racines d'un polynôme -Factorisation d'un polynôme

Activité 2:

Soit $P(x)=x^3-2x^2-x+2$

a) Calculer $P(-1)$, $P(0)$, $P(1)$ et $P(2)$

b) Que remarquez-vous ?

c) Factoriser alors $P(x)$

Définition 4

Soit P et Q deux polynômes.

- On dit que α_i est une racine ou un zéro d'un polynôme P si $P(\alpha_i)=0$
- Si α_i est une racine d'un polynôme P alors $P(x)=(x-\alpha_i).R(x)$ pour tout réel x ou $d°(R)=d°(P)-1$
- On dit que le polynôme P est factorisable par le polynôme Q s'il existe un polynôme R tel que pour tout réel x, $P(x)=Q(x).R(x)$ tel que $d°(R)=d°(P)-d°(Q)$

Activité 3:

Soit P et Q les polynômes définis par $P(x)=x^3+3x^2-4x-12$ et $Q(x)=3x^3+x^2+2x-6$.

1) a) Vérifier que 2 et -3 sont deux racines de P.

   b) Déterminer le polynôme R tel que, pour tout réel x, on a $P(x)=(x-2)(x+3).R(x)$

2) a) calculer Q(1)

c) Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout réel x, on a $Q(x)=(x-1)(ax^2+bx+c)$

Théorème :

Soit P un polynôme de degré n.

- *Pour $n \geq 1$, si α_1 est une racine de P alors*
  - *P est factorisable par $(x-\alpha_1)$*
  - *Il existe un polynôme R de degré $(n-1)$ tel que $P(x)=(x-\alpha_1).R(x)$*
- *Pour $n \geq 2$, si α_1 et α_2 sont deux racines de P alors*
  - *P est factorisable par $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$*
  - *Il existe un polynôme R de degré $(n-2)$ tel que*

  $P(x)=(x-\alpha_1))(x-\alpha_2).R(x)$
- ***Plus généralement** soit P est un polynôme de degré n $(n \geq 3)$ si α_1 , α_2 , α_3 , …… et α_k $(k \leq n)$ sont des racines de P alors*
  - *P est factorisable par $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ \dots (x-\alpha_{k)}$*
  - *Il existe un polynôme R de degré $(n-k)$ tel que*

  $P(x)=(x-\alpha_1))(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ \dots (x-\alpha_{k)}.R(x)$

Exercice :

1) *Soit $P(x)=2x^3-3x^2-5x+6$*
   Vérifier que $\alpha=2$ est une racine du polynôme P et écrire P(x) sous la forme $(x-\alpha).Q(x)$, ou Q(x) est un polynôme qu'on déterminera.
2) *Soit $P(x)=3x^3-13x^2-11x+5$*
   Vérifier que $\alpha=-1$ et $\beta=5$ sont deux racines du polynôme P et écrire P(x) sous la forme $(x-\alpha)(x-\beta).R(x)$ ou R(x) est un polynôme qu'on déterminera.

5) Polynômes symétriques

- *Polynômes symétriques de degré 3*

  Soit $P(x)=ax^3+bx^2+bx+a$ avec $a \neq 0$

  On remarque que -1 est une racine apparente donc on peut écrire P sous la forme suivante : $P(x)=(x+1)[ax^2+(b-a)x+a]$ et on détermine le nombre de solution de P(x) suivant les valeurs de a et b
- *Polynômes symétriques de degré 4*

  Soit $P(x)=ax^4+bx^3+cx^2+bx+a$

- *Si $a+b+c+b+a=0$ ou $c=-2(a+b)$ on remarque que 1 est une racine double de P donc on écrit P sous la forme suivante :*
  $P(x)=(x-1)^2.Q(x)$, ou Q(x) est un polynôme qu'on déterminera.
- *Si $a+b+c+b+a \neq 0$, on vérifier que 0 n'est pas une racine de P donc on établir que l'équation $P(x)$ est équivalente à l'équation suivante $P_1(x)=a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c$*

  Poser $X = x+\frac{1}{x}$ et résoudre l'équation $P_1(x)=0$

  On remarque que l'équation se ramène à la résolution de deux équations du second degré.