Lycée : Echebbi Tadhaman	Devoir de synthèse N° 1	Profs : Mr SAIDANI - Mr OUERGHI
Année scolaire : 2020/2021		Epreuve : MATHEMATIQUES
Classes: 4 Eco 1 & 2 & 3 & 4		Durée :120min

EXERCICE N°1 (3 points)

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse

1°) $\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-5x+6}{(x-2)^2} = +\infty$

2°) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ tel que $f(-1) = 3$ et $f'(-1) = -2$

Alors l'équation de la tangente à la courbe de f en -1 est : $y = -2x + 1$

3°) Soit E une matrices carrée d'ordre 3 tel que $E^2 - 5E = -I_3$

Alors la matrice E^{-1} l'inverse de E est $E + 5I_3$

4°) L'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

EXERCICE N°2 (6 points)

1°) On donne la matrice : A $= \begin{pmatrix} n & n & n \\ 2 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ où n un nombre réel

Pour quelle valeur n la matrice A est inversible

2°) On donne dans la suite $n = 1$ et la matrice B $= \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 9 & 3 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calculer A × B
b) En déduire la matrice inverse de A

3°) Un atelier de couture confectionne 400 pantalons en trois modèles P_1 , P_2 et P_3

Il dispose d'un tissu de longueur 492 mètres pour la couture de ces pantalons avec un coût total de 5680 dinars

La longueur du tissu et le coût de couture d'un pantalon de chaque modèle sont donnés dans le tableau suivant :

Type de pantalon	P_1	P_2	P_3
Le coût de couture d'un pantalon (en dinars)	8	16	20
Longueur du tissu	1	1.2	1.6

a) Montrer que la situation se traduit par le système : $\begin{cases} x + y + z = 400 \\ 2x + 4y + 5z = 1420 \\ 5x + 6y + 8z = 2460 \end{cases}$

b) Donner l'écriture matricielle

c) Déterminer alors le nombre de pantalons coudés de chaque modèle.

EXERCICE N°3 (4 points)

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -12 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

1°) Calculer M^2 et M^3

2°) Déduire la matrice M^{-1} l'inverse de M

3°) Résoudre alors dans $\mathbb{R}^3$ le système : $\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 4x - 12z = -8 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$

EXERCICE N°4 (7 points)

1°) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$

a) Calculer $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$ *et* $f(3)$
b) Calculer $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ *et* $\lim_{x \to +\infty} f(x)$
c) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis calculer $f'(x)$
d) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$

2°) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α

tel que $-1 < \alpha < 0$

b) Déduire le signe de f sur $\mathbb{R}$

3°) Une entreprise fabrique des aspirateurs

Chaque mois elle produit un nombre x centaine d'aspirateurs où $0 < x \leq 3$

Le coût de production en milliers de dinars en fonction du nombre x centaine d'aspirateurs est modélisée par : $C(x) = -x^3 + 6x^2 - \frac{35}{4}x - 4$

La recette mensuelle exprimée en milliers de dinar est donnée par $R(x) = \frac{1}{4}x$

a) Montrer que les bénéfices mensuels en milliers de dinars en fonction de x centaine d'aspirateurs est : $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$
b) Déterminer le nombre de x centaine d'aspirateurs pour assurer un bénéfice égal à 4 mille dinars
c) Combien de x centaine d'aspirateurs par mois doit produire l'entreprise pour réaliser un bénéfice maximal, que vaut ce bénéfice

Lycée : Echebbi Tadhaman	Correction Devoir de synthèse N°1	Profs : Mr SAIDANI - Mr OUERGHI
Année scolaire : 2020/2021		Epreuve : MATHEMATIQUES
Classes: 4 Eco 1 & 2 & 3 & 4		Durée :120min

EXERCICE N°1 (3 points)

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse

1°) $\lim_{x\to2^+} \frac{x^2-5x+6}{(x-2)^2} = +\infty$ **(faux)**

$$\lim_{x\to2^+} \frac{x^2-5x+6}{(x-2)^2} = \lim_{x\to2^+} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)^2} = \lim_{x\to2^+} \frac{(x-3)}{(x-2)} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \quad \textbf{(0,75)}$$

2°) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ tel que $f(-1) = 3$ et $f'(-1) = -2$

Alors l'équation de la tangente à la courbe de f en -1 est : $y = -2x + 1$ **(vrai)**

$y = f'(-1)\,[x - 1) + f(-1)$ $d'ou$ $y = -2\,[x+1] + 3$

$y = -2x - 2 + 3 = -2x + 1$ **(0,75)**

3°) Soit E une matrices carrée d'ordre 3 tel que $E^2 - 5E = -I_3$

Alors la matrice E^{-1} l'inverse de E *est* $E + 5I_3$ **(faux)**

$E^2 - 5E = -I_3$ *équivaut à* $E\,(E - 5I_3) = -I_3$ *équivaut à* $E\,(5I_3 - E) = I_3$

Alors la matrice E^{-1} l'inverse de E *est* $5I_3 - E$ **(0,75)**

4°) L'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ **(vrai)**

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+3 & -2+2 \\ 3-3 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = I_2 \quad \textbf{(0,75)}$$

EXERCICE N°2 (6 points)

1°) $\det(A) = \begin{vmatrix} n & n & n \\ 2 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 8 \end{vmatrix} = n\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} - n\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} + n\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$

$= n(32-30) - n\,(16-25) + n\,(12-20) = 2n + 9n - 8n = 3n \neq 0$

Donc si $n \neq 0$ la matrice A est inversible **(1)**

2°) a) **(0,75)**

$$A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 9 & 3 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3I_3.$$

b) **(0,75)**

$$A \times B = 3I_3 \Leftrightarrow A \times \frac{1}{3}B = I_3.$$

Donc A est inversible et sa matrice inverse est : $A^{-1} = \frac{1}{3}B = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 3 & 1 & -1 \\ -\frac{8}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

3°) a) **(2)**

On désigne par : x : le nombre de pantalons coudés de type P_1.

y : le nombre de pantalons coudés de type P_2.

z : le nombre de pantalons coudés de type P_3.

- L'atelier confectionne 400 pantalons, donc : $\boldsymbol{x + y + z = 400}$.
- Le coût de couture d'un pantalon de type P_1 est égal à 8 $dinars$, le coût de couture d'un pantalon de type P_2 est égal à 16 $dinars$, le coût de couture d'un pantalon de type P_3 est égal à 20 $dinars$ et le coût total pour la couture de ces pantalons est égal à 5680 $dinars$, donc :

  $8x + 16y + 20z = 5680$ soit $\boldsymbol{2x + 4y + 5z = 1420}$
- La longueur du tissu d'un pantalon de type P_1 est égal à 1 m, la longueur du tissu d'un pantalon de type P_2 est égal à 1,2 m, la longueur du tissu d'un pantalon de type P_3 est égal à 1,6 m et la longueur total du tissu pour confectionner ces pantalons est égal à 492 m, donc :

  $x + 1{,}2y + 1{,}6z = 492$ soit $\boldsymbol{5x + 6y + 8z = 2460}$

Ainsi la situation se traduit par le système (S): $\begin{cases} x + y + z = 400 \\ 2x + 4y + 5z = 1420 \\ 5x + 6y + 8z = 2460 \end{cases}$

b) **(0,5)**

L'écriture matricielle du système (S) : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 400 \\ 1420 \\ 2460 \end{pmatrix}$

c) **(1)**

$$X = A^{-1}C \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 3 & 1 & -1 \\ -\frac{8}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 400 \\ 1420 \\ 2460 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 140 \\ 160 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que :

Le nombre de pantalons coudés de type P_1 est 140.

Le nombre de pantalons coudés de type P_2 est 160.

Le nombre de pantalons coudés de type P_3 est 100.

EXERCICE N°3 (4 points)

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -12 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

1°) $M \times M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -12 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -12 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 5 & -24 \\ -8 & -4 & 24 \\ 4 & 1 & -8 \end{pmatrix}$ **(1)**

$M^3 = M \times M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -12 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & 5 & -24 \\ -8 & -4 & 24 \\ 4 & 1 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ **(1)**

2°) D'après 1°) $M^3 = 8\, I_3$ $\quad donc\ \frac{1}{8} \times M \times M^2 = I_3 \quad par\ suite$ la matrice M^{-1} l'inverse de M

est $M^{-1} = \frac{1}{8} \times M^2 = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 12 & 5 & -24 \\ -8 & -4 & 24 \\ 4 & 1 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{5}{8} & -3 \\ -1 & \frac{-1}{2} & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & -1 \end{pmatrix}$ **(1)**

3) L'écriture matricielle du system est $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -12 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}$

Par suite : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{5}{8} & -3 \\ -1 & \frac{-1}{2} & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Alors $S_{\mathbb{R}} = \{ 1 ; 1 ; 1 \}$ **(1)**

EXERCICE N°4 (7 points)

1°) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$

a) $f(-1) = -12$, $f(0) = 4$, $f(1) = 8$ *et* $f(3) = 6$ **($0,25 \times 4 = 1$)**

b) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$ **(0,25)**

et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$ **(0,25)**

c) f est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$ **(0,5)**

et $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ **(0,5)**

d) $f'(x) = 0$ équivaut à $x = 1$ *ou* $x = 3$ **(1)**

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
f'		+		−		+	
Variation de f	$-\infty$	↗	8	↘	6	↗	$+\infty$

2°) a) D'après le tableau de variation de f si $x \in [1, +\infty[$ $f(x) \geq 6$

<u>Si $x \in]-\infty, 1]$</u>

- f continue sur $]-\infty, 1]$ ($fonction\ polynôme$)
- f strictement croissante sur $]-\infty, 1]$
- $f(-1) = -12 < 0$ *et* $f(0) = 4 > 0$ **(1)**

Donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α tel que $-1 < \alpha < 0$

b) **(0,5)**

x	$-\infty$		α		$+\infty$
signe de f		−	0	+	

3°) a) Le bénéfice est définie par $R(x) - C(x) = \frac{1}{4}x - \left(-x^3 + 6x^2 - \frac{35}{4}x - 4\right)$

(0, 5) $= \frac{1}{4}x + x^3 - 6x^2 + \frac{35}{4}x + 4$

$= x^3 - 6x^2 + 9x + 4 = f(x)$

b) $f(x) = 4$ *équivaut à* $x^3 - 6x^2 + 9x + 4 = 4$

équivaut à $x^3 - 6x^2 + 9x = 0$

équivaut à $x\ (x^2 - 6x + 9) = 0$

équivaut à $x\,(x - 3)^2 = 0$

équivaut à $x = 0$ *ou* $x = 3$ Comme $0 < x \leq 3$ d'où $x = 3$

Par suite pour assurer un bénéfice égal à 4 mille dinars il suffit de fabriquer 300 d'aspirateurs **(1)**

c) D'après le tableau de variation de f ; l'entreprise doit produire 100 aspirateurs réaliser un bénéfice maximal qui vaut 8 mille dinars **(0,5)**